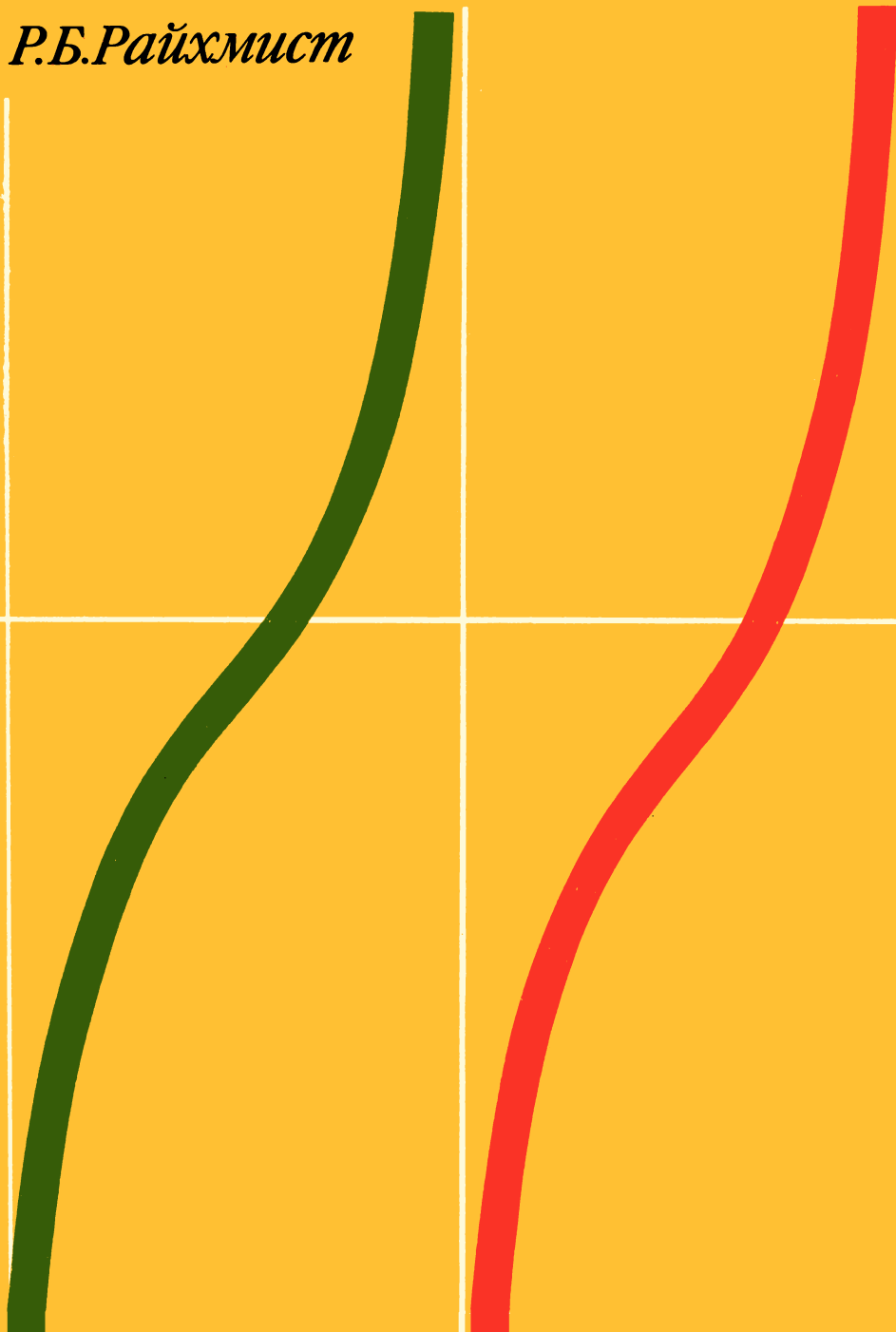


# ГРАФИКИ ФУНКЦИЙ

*Р.Б.Райхмист*



*Р.Б.Райхмист*

---

# ГРАФИКИ ФУНКЦИЙ



Москва  
«Высшая школа»  
1991

ББК 22.161.1  
Р18  
УДК 517.4

Рецензенты: кафедра высшей математики Московского электротехнического института связи (зав. кафедрой проф. П. К. Суетин); канд. экон. наук А. А. Рывкин

**Райхмист Р. Б.**

Р18      **Графики функций: Справ. пособие для вузов. —**  
М.: Высш. шк., 1991. — 160 с.: ил.  
ISBN 5-06-00634-4

В пособии рассматриваются различные классы функций и методы построения их графиков. Особое внимание уделено графикам функций, заданных неэлементарно (например, с помощью пределов), заданных параметрически и т.п. В основном приводятся графики функций, широко используемых в различных областях инженерных знаний.

Для студентов вузов и специалистов, интересующихся вопросами математики.

Р 1602070000(4309000000)—301 81—91  
001(01)—91

ББК 22.161.1  
517.4

ISBN 5-06-00634-4

© Р. Б. Райхмист, 1991

## СОДЕРЖАНИЕ

<b>Раздел I.</b>	<b>Основные сведения о функциях</b>	<b>5</b>
§ 1.	Функция	5
§ 2.	Общие свойства функций	7
§ 3.	Предел функции	12
§ 4.	Непрерывность	14
§ 5.	Асимптоты	16
§ 6.	Отыскание интервалов монотонности и экстремумов функции	18
§ 7.	Отыскание интервалов выпуклости и точек перегиба	23
<b>Раздел II.</b>	<b>Простейшие элементарные функции</b>	<b>26</b>
<b>Раздел III.</b>	<b>Методы построения графиков функций без использования производной</b>	<b>35</b>
§ 1.	Простейшие преобразования графиков	35
§ 2.	Основные операции над графиками функций	40
§ 3.	Построение графиков функций вида $y = f(kx + b)$	41
§ 4.	Построение графиков функций вида $y = f(ax^2 + bx + c)$	47
§ 5.	Построение графиков функций вида $y = f\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)$	52
§ 6.	Эскизирование графиков функций	55
§ 7.	Примеры построения эскизов графиков функций	59
<b>Раздел IV.</b>	<b>Общая схема исследования функций при построении графиков</b>	<b>65</b>
§ 1.	Схема исследования функций с использованием производной	65
§ 2.	Применение ряда Тейлора к исследованию функций	65
§ 3.	Примеры применения общей схемы	67
<b>Раздел V.</b>	<b>Элементарные функции (продолжение)</b>	<b>83</b>
<b>Раздел VI.</b>	<b>Простейшие неэлементарные функции</b>	<b>89</b>
§ 1.	Ступенчатые функции	89
§ 2.	Кусочно-непрерывные функции	92
§ 3.	Графики функций, заданных с помощью пределов	93
<b>Раздел VII.</b>	<b>Некоторые специальные функции</b>	<b>103</b>
<b>Раздел VIII.</b>	<b>Некоторые статистические функции</b>	<b>106</b>
§ 1.	Дискретные распределения	106
§ 2.	Непрерывные распределения	108



<b>Раздел IX. Кривые на плоскости</b>	111
§ 1. Основные понятия	111
§ 2. Кривые, заданные параметрически	116
§ 3. Кривые, заданные неявными уравнениями	135
§ 4. Кривые, заданные уравнениями в полярных координатах	142
<b>Раздел X. Важнейшие кривые</b>	154
§ 1. Алгебраические кривые 2-го порядка	154
§ 2. Алгебраические кривые 3-го порядка	156
§ 3. Алгебраические кривые 4-го и высших порядков	157
§ 4. Трансцендентные кривые	159
<b>Литература</b>	160

## Раздел I

### ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ О ФУНКЦИЯХ

#### § 1. Функция

**1. Понятие функции.** Пусть  $D$  и  $E$  — непустые числовые множества, а  $x$  и  $y$  — соответственно их элементы. Если каждому  $x \in D$  ставится в соответствие по некоторому закону только одно значение  $y \in E$ , то говорят, что между переменными  $x$  и  $y$  существует *функциональная зависимость*, и называют  $x$  *независимой переменной* (или *аргументом*), а  $y$  — *зависимой переменной* (или *функцией*).

Символическая запись функции:  $y = f(x)$  ( $x \in D$ ).

Множество  $D$  называют *областью определения* функции и обозначают  $D(f)$ , а множество  $E$  называют *областью изменения* функции. Говорят еще, что функция  $f$  *отображает* множество  $D$  на множество  $E$ . Более строго понятие отображения будет рассмотрено в разд. IX.

Таким образом, символ  $f(x)$  обозначает число  $y$ , которое в силу закона  $f$  соответствует значению  $x \in D$ . Например,  $f(x_0)$  есть значение функции  $f$  в точке  $x = x_0$ , если  $x_0 \in D$ . Если же  $x_0$  не принадлежит  $D$  ( $x_0 \notin D$ ), то говорят, что функция  $f$  *не определена* в точке  $x_0$ . Для функций  $f$  и  $g$ , заданных на одном и том же множестве  $D$ , можно определить их сумму, разность, произведение и частное. Это новые функции  $f(x) + g(x)$ ,  $f(x) - g(x)$ ,  $f(x) \cdot g(x)$ ,  $f(x)/g(x)$  ( $x \in D$ ), где в случае частного предполагается, что  $g(x) \neq 0$  на  $D$ . Если функция  $f$  отображает множество  $D$  на множество  $E$ , а функция  $F$  отображает множество  $E$  на множество  $G$ , то функцию  $z = F(f(x))$  называют *функцией от функции* (или *сложной функцией* или *суперпозицией*)  $f$  и  $F$ . Она определена на множестве  $D$  и отображает  $D$  на  $G$ .

**2. Способы задания функции.** Функция может быть задана различными способами: табличным, аналитическим (с помощью формулы), описательным и графическим.

*Табличный способ* состоит в том, что все числовые значения аргумента располагают в одной строке, а значения функции — в другой строке так, чтобы каждому значению аргумента отвечало соответствующее значение функции.

Например,

$x$	0	1	3,5	5	7,3	13,2
$y$	1	2	4	0	1,3	$\pi$

По этому принципу построены таблицы Брадиса и др.

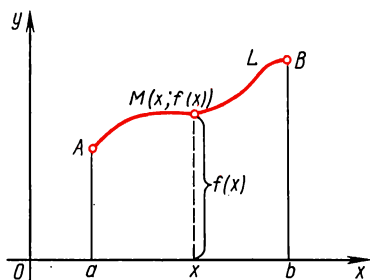


Рис. 1

При *аналитическом способе* функция задается математической формулой, с помощью которой значение  $y$  вычисляется по заданному значению  $x$ .

Пусть, например,  $y = x^2$ . Положим  $x = 1$ ; тогда получим  $y = 1$ . Иногда это записывают так:  $f(1) = 1$ . При  $x = 2$  и  $x = 5$  соответственно найдем  $f(2) = 4$  и  $f(5) = 25$ .

Рассмотрим другой пример.

Пусть  $y = \lg x$ . Полагая  $x = 1$ ,  $x = 10$ ,  $x = 0,1$ , соответственно получим  $f(1) = 0$ ,  $f(10) = 1$ ,  $f(0,1) = -1$ .

Если не дано каких-либо дополнительных ограничений, то областью определения функции, заданной формулой, считают множество всех тех значений аргумента, для которого все указанные в формуле операции выполнимы. Так, для функции  $y = x^2$  область определения  $D(f) = (-\infty, +\infty)$ ; для функции  $y = \lg x$  область определения  $D(f) = (0, +\infty)$ ; для функции  $y = \sqrt{1 - x^2}$  имеем  $D(f) = [-1, 1]$ ; для функции  $y = \arcsin x$  имеем  $D(f) = [-1, 1]$ ; для функции  $y = \frac{1}{x-2}$  имеем  $D(f) = (-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$ .

При *описательном способе* зависимость между  $x$  и  $y$  выражается словесным описанием. Например  $y$  есть наибольшее целое число, не превосходящее  $x$ . Эту функцию принято обозначать  $[x]$ . Пусть  $x = 2$ ; тогда  $[x] = 2$ . При  $x = 5,3$  найдем  $[5,3] = 5$ , а при  $x = -2,17$  получим  $[-2,17] = -3$ .

Все перечисленные выше способы страдают одним и тем же недостатком — плохой наглядностью. Наилучшим с этой точки зрения является следующий способ задания функции — *графический*.

Зададим прямоугольную систему координат  $xy$  (рис. 1), на оси  $x$  отметим отрезок  $[a, b]$  и изобразим любую кривую  $L$ , обладающую следующим свойством: какова бы ни была точка  $x \in [a, b]$ , прямая, проходящая через нее параллельно оси  $y$ , пересекает кривую  $L$  в одной точке. Такая заданная в декартовой прямоугольной системе координат кривая  $L$  называется *графиком*. График определяет функцию  $y = f(x)$  на отрезке  $[a, b]$  следующим образом. Если  $x$  — произвольная точка отрезка  $[a, b]$ , то соответствующее значение  $y = f(x)$  находится как ордината точки  $M(x, f(x))$ . Следовательно, с помощью графика задается вполне определенный закон соответствия между  $x$  и  $y = f(x)$ . Вместо отрезка  $[a, b]$  можно рассмотреть интервал, полуинтервал, действительную ось и т. д.

Приведенное определение графика относится исключительно к декартовой прямоугольной системе координат. В дальнейшем (см. разд. IX) будет дано более широкое определение.

## § 2. Общие свойства функций

### 1. Четность и нечетность.

**Определение 1.** Функция  $y=f(x)$  называется *четной*, если для любого значения  $x$ , взятого из области определения функции, значение  $-x$  также принадлежит области определения и выполняется равенство  $f(x)=f(-x)$ .

Согласно определению, четная функция определена на множестве, симметричном относительно начала координат. График четной функции симметричен относительно оси ординат (рис. 2).

Примеры четных функций:  $y=x^2$ ,  $\sqrt[3]{x^2}$ ,  $y=\ln|x|$ ,  $y=\cos x$ .

**Определение 2.** Функция  $y=f(x)$  называется *нечетной*, если для любого значения  $x$ , взятого из области определения функции, значение  $-x$  также принадлежит области определения и выполняется равенство  $f(x)=-f(-x)$ .

График нечетной функции симметричен относительно начала координат (рис. 3).

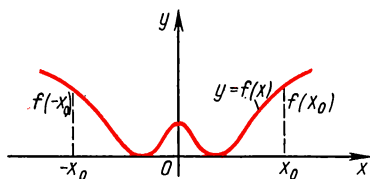


Рис. 2

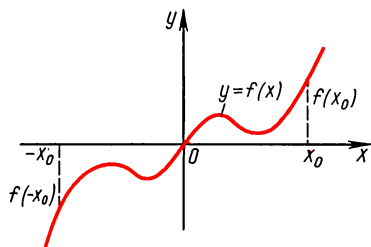


Рис. 3

Примеры нечетных функций:  $y=x^3$ ,  $y=\sin x$ ,  $y=\sqrt[3]{x}$ ,  $y=\operatorname{tg} x$ ,  $y=x\sqrt{1+x^2}$ ,  $y=\arcsin x$ ,  $y=\operatorname{arctg} x$ .

При построении графиков четных и нечетных функций достаточно построить только правую ветвь графика — для положительных значений аргумента. Левая ветвь достраивается симметрично относительно оси  $y$  для четной функции и кососимметрично (т. е. симметрично относительно начала координат) для нечетной. Нетрудно установить, что произведение двух четных или двух нечетных функций представляет собой четную функцию, а произведение четной и нечетной функций — нечетную функцию.

Конечно, большинство функций не являются ни четными, ни нечетными. Таковы, например, функции  $y=x^2-x$ ,  $y=\sqrt[3]{x-2}$ ,  $y=\sin(2x-1)$ .

### 2. Периодичность.

**Определение 3.** Функция  $y=f(x)$  называется *периодической*, если существует такое число  $T \neq 0$ , что для любого значения  $x$ , взятого из области определения, значения  $x+T$ ,  $x-T$  также принадлежат области определения и выполняется равенство  $f(x)=f(x+T)$  (рис. 4).

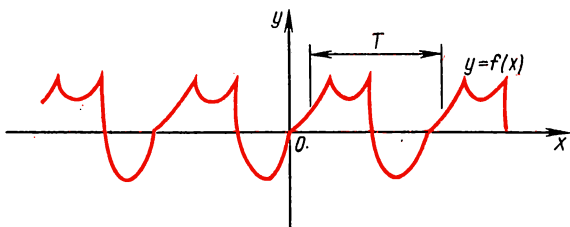


Рис. 4

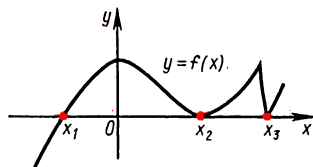


Рис. 5

Число  $T$  называется *периодом* функции. Заметим, что всякая периодическая функция имеет бесконечное число периодов. В самом деле, числа вида  $nT$  при любом целом  $n$  также являются периодами функции  $f(x)$ , так как

$$f(x+nT) = f((x+n-1)T + T) = f(x+(n-1)T) = \dots = f(x).$$

Иногда периодом называют наименьшее из всех чисел  $T > 0$ , удовлетворяющее данному выше определению.

Примеры периодических функций:  $y = \sin x$ ,  $y = \operatorname{ctg} x$ ,  $y = \sin^3 x$ ,  $y = \ln \cos x$ ,  $y = \{x\}$ , т. е. дробная часть числа  $x$ . Периодической является и всякая постоянная функция, причем ее периодом служит любое ненулевое число.

Отметим, что периодическую функцию достаточно исследовать в пределах одного периода.

Примеры непериодических функций:  $y = x^3$ ,  $y = \operatorname{arccotg} x$ ,  $y = e^x$ ,  $y = \sin(x^2 + 1)$ .

### 3. Нули функции.

**О п р е д е л е н и е 4.** *Нулем* функции называется такое действительное значение  $x$ , при котором значение функции равно нулю.

Для того чтобы найти нули функции, следует решить уравнение  $f(x) = 0$ . Действительные корни этого уравнения являются нулями функции  $y = f(x)$ , и обратно. Нули функции представляют собой абсциссы точек, в которых график этой функции либо пересекает ось абсцисс, либо касается ее, либо имеет общую точку с этой осью (рис. 5). Например, функция  $y = x^3 - 3x$  имеет нули в точках  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = -\sqrt{3}$ ,  $x_3 = \sqrt{3}$ , а функция  $y = \ln(x-1)$  имеет нуль в точке  $x = 2$ .

Функция может и не иметь нулей. Такова, например, функция  $y = a^x$ .

**4. Монотонность.** Переменную величину называют *монотонной*, если она изменяется только в одном направлении, т. е. либо только возрастает, либо только убывает. Очевидно, что движение точки  $x$



Рис. 6

в сторону положительного направления оси абсцисс является монотонно возрастающим (рис. 6, а), а в противоположную сторону — монотонно убывающим (рис. 6, б).

Функцию называют *монотонно возрастающей*, если с увеличением аргумента значение функции увеличивается (рис. 7, а), и

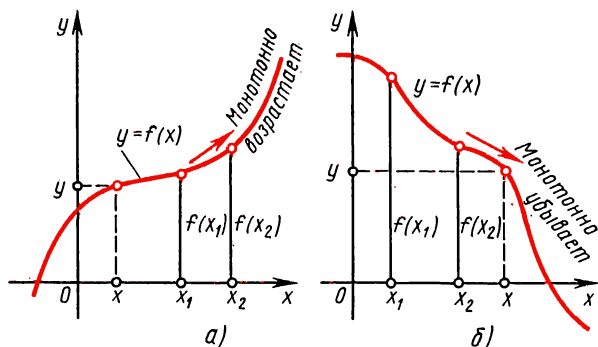


Рис. 7

*монотонно убывающей*, если с увеличением аргумента значение функции уменьшается (рис. 7, б).

Приведем теперь строгое определение монотонности.

**О п р е д е л е н и е 5.** Функция  $y=f(x)$  называется *монотонно возрастающей* на интервале  $(a, b)$ , если для любых  $x_1$  и  $x_2$ , принадлежащих этому интервалу, из неравенства  $x_2 > x_1$  следует неравенство  $f(x_2) > f(x_1)$ . Функция  $y=f(x)$  называется *монотонно убывающей* на интервале  $(a, b)$ , если для любых  $x_1$  и  $x_2$ , принадлежащих этому интервалу, из неравенства  $x_2 > x_1$  следует неравенство  $f(x_2) < f(x_1)$ . Естественно, что интервал  $(a, b)$  предполагается взятым из области определения функции.

**5. Понятие обратной функции.** Пусть функция  $y=f(x)$  задана на отрезке  $[a, b]$  и пусть отрезок  $[\alpha, \beta]$  является множеством значений этой функции. Пусть, кроме того, каждому  $y$  из отрезка  $[\alpha, \beta]$  соответствует только одно значение  $x$  из отрезка  $[a, b]$ , для которого  $f(x)=y$ . Тогда на отрезке  $[\alpha, \beta]$  определена функция, которая каждому  $y$  из  $[\alpha, \beta]$  ставит в соответствие то значение  $x$  из  $[a, b]$ , для которого  $f(x)=y$ . Эта функция называется *обратной* для функции  $y=f(x)$  и обозначается символом  $x=f^{-1}(y)$ .

В частности, для функции  $y=a^x$  обратной служит функция  $y=\log_a x$ . Отметим, что графики прямой и обратной функций симметричны относительно биссектрисы I и III координатных углов.

**6. Выпуклость вверх и вниз.** Говорят, что функция  $y=f(x)$  *выпукла вверх* в точке  $x_0$ , если существует окрестность точки  $x_0$  такая, что для всех ее точек  $x$  касательная к графику функции в точке  $M_0(x_0; y_0)$  лежит выше графика (рис. 8, а).

Говорят, что функция  $y=f(x)$  *выпукла вниз* в точке  $x_0$ , если

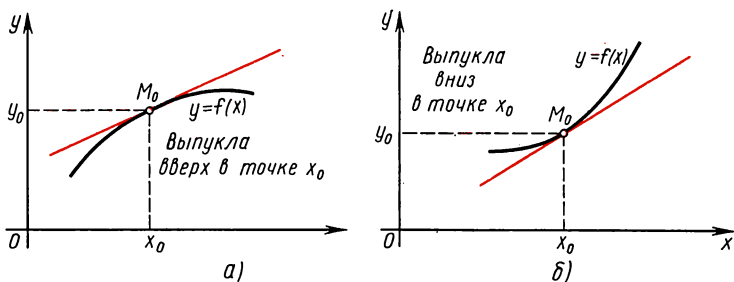


Рис. 8

существует окрестность точки  $x_0$  такая, что для всех ее точек  $x$  касательная к графику функции в точке  $M_0(x_0, y_0)$  лежит ниже графика (рис. 8, б).

Если на некотором промежутке  $(a, b)$  все касательные к графику функции  $y=f(x)$  лежат выше (соответственно ниже) самого графика, то на данном промежутке функция выпукла вверх (соответственно выпукла вниз).

Понятие выпуклости функции на промежутке можно ввести, не требуя существования касательной в каждой точке графика.

**О п р е д е л е н и е 6.** Функция  $y=f(x)$ , определенная и непрерывная на отрезке  $[a, b]$ , называется *выпуклой вверх* на этом отрезке (рис. 9, а), если для любых  $x_1$  и  $x_2$  ( $x_1 < x_2$ ), взятых из отрезка  $[a, b]$ , и любого числа  $\lambda$  такого, что  $0 \leq \lambda \leq 1$ , выполняется неравенство

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) > \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2).$$

Аналогично, функция  $y=f(x)$  называется *выпуклой вниз* на отрезке  $[a, b]$  (рис. 9, б), если для любых  $x_1$  и  $x_2$  ( $x_1 < x_2$ ), взятых из этого отрезка, и любого числа  $\lambda$  такого, что  $0 \leq \lambda \leq 1$ , выполняется неравенство

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) < \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2).$$

Геометрический смысл этих определений таков: выпуклая вверх

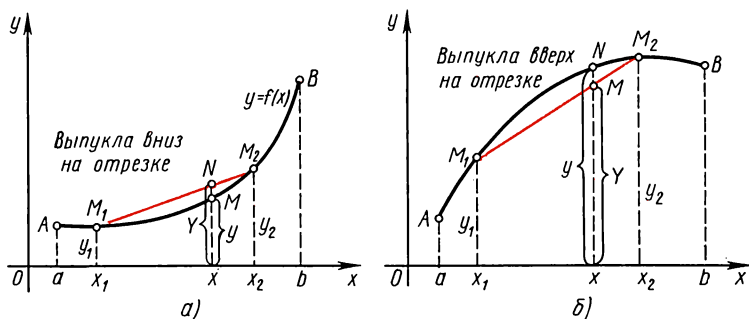


Рис. 9

(вниз) на отрезке функция характеризуется тем, что все точки любой дуги ее графика расположены над (под) соответствующей хордой.

Действительно, выражение  $x = \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2$  ( $x_1 < x_2$ ) определяет любую точку отрезка  $[x_1, x_2]$  при  $0 \leq \lambda \leq 1$ , поскольку  $x = x_2 - \lambda(x_2 - x_1)$ . Таким образом определение выпуклости можно записать так:

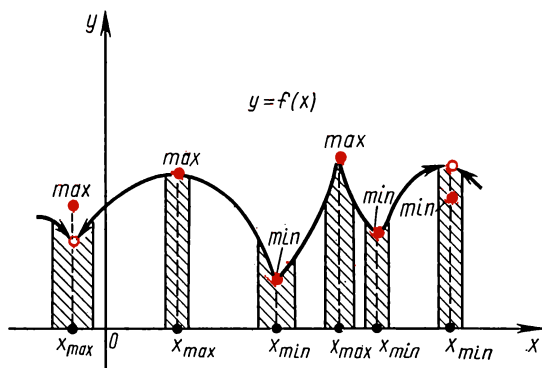


Рис. 10

$$y > \lambda y_1 + (1 - \lambda)y_2 \quad \text{или} \quad y > y_2 + \lambda(y_1 - y_2).$$

С другой стороны, уравнение прямой, проходящей через точки  $M_1$  и  $M_2$ , имеет вид

$$Y = y_2 + \frac{x - x_2}{x_1 - x_2}(y_1 - y_2) \quad \text{или} \quad Y = y_2 + \lambda(y_1 - y_2).$$

Итак, определение выпуклости функции на отрезке означает, что  $y > Y$  в случае выпуклости вверх и  $y < Y$  в случае выпуклости вниз, где  $y$  — ордината точки  $N$  графика функции с абсциссой  $x$  на отрезке  $[x_1, x_2]$ , а  $Y$  — ордината точки  $M$  ее хорды.

**7. Экстремумы.** Точку  $x_0$  называют *точкой локального максимума* (относительного максимума) для функции  $f(x)$ , если значение функции в этой точке больше, чем значения функции в ближайших соседних точках (рис. 10). Точку  $x_0$  называют *точкой локального минимума* (относительного минимума) для функции  $f(x)$ , если значение функции в этой точке меньше, чем значения функции в ближайших соседних точках (рис. 10).

Для обозначения максимума или минимума существует общий термин «экстремум» (от лат. «крайний»).

Дадим теперь строгое определение.

**О п р е д е л е н и е 7.** Пусть функция  $y = f(x)$  определена на отрезке  $[a, b]$ . Говорят, что функция  $y = f(x)$  имеет *локальный максимум* в точке  $x_0 \in [a, b]$ , если существует окрестность точки  $x_0$ , целиком содержащаяся в  $[a, b]$  и такая, что для любого  $x$ , принадлежащего этой окрестности, выполняется неравенство  $f(x) < f(x_0)$ .

Под *окрестностью точки*  $x_0$  понимают интервал длины  $2\varepsilon$  с центром в точке  $x_0$ , т. е.  $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ , где  $\varepsilon$  — произвольное положительное число.

Говорят, что функция  $y = f(x)$  имеет *локальный минимум* в точке  $x_0 \in [a, b]$ , если существует окрестность точки  $x_0$ , целиком содержа-



щаяся в  $[a, b]$  и такая, что для любого  $x$ , принадлежащего этой окрестности, выполняется неравенство  $f(x) > f(x_0)$ .

**З а м е ч а н и е.** Приращение функции  $\Delta f(x) = f(x) - f(x_0)$  в некоторой окрестности точки экстремума не меняет знак; оно положительно, если в точке  $x_0$  достигается минимум, и отрицательно, если в точке  $x_0$  — максимум. Этот факт следует из определения экстремума.

### § 3. Предел функции

Говорят, что функция  $y = f(x)$  имеет *предел*  $A$  при  $x \rightarrow a$ , если с приближением значения аргумента  $x$  к числу  $a$  значение  $f(x)$  приближается к числу  $A$ .

Предел функции при  $x \rightarrow a$  обозначают так:  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ .

В самой точке  $x = a$  функция может и не существовать. Такова, например, функция  $y = \frac{\sin x}{x}$  в точке  $x = 0$ . Как известно,

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ , хотя в точке  $x = 0$  значение функции не определено.

Дадим теперь строгое определение предела функции.

**О п р е д е л е н и е 1.** Число  $A$  называется *пределом* функции  $y = f(x)$  в точке  $x = a$ , если для любого  $\varepsilon > 0$  найдется такое число  $\delta > 0$ , что для всех  $x$ , удовлетворяющих неравенству  $0 < |x - a| < \delta$ , выполняется неравенство  $|f(x) - A| < \varepsilon$ .

В определении предела функции не указывается, каким образом аргумент  $x$  стремится к числу  $a$ . Если предел функции в точке  $a$  существует, то он не зависит от способа приближения аргумента  $x$  к точке  $a$ . Пусть переменная величина  $x$  обозначает движущуюся точку на оси абсцисс. Тогда стремление этой точки к  $a$  может происходить справа или слева. Результат стремления точки справа к  $a$  будем обозначать через  $a + 0$ , а слева — через  $a - 0$ , где знаки  $+0$  и  $-0$  играют роль указателей направления приближения точки к  $a$ . Естественно, в обоих случаях результатом приближения точек является число  $a$ .

Дадим теперь строгое определение для общей ситуации.

**О п р е д е л е н и е 2.** Число  $B$  называется *правым пределом* функции  $f(x)$  при стремлении  $x$  к точке  $a$  справа (т. е. по значениям  $x > a$ ), если для любого  $\varepsilon > 0$  найдется такое  $\delta > 0$ , что для всех  $x$ , удовлетворяющих неравенству  $0 < x - a < \delta$ , выполняется неравенство  $|f(x) - B| < \varepsilon$ .

Правый предел символически обозначают так:  $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = B$ .

Число  $C$  называется *левым пределом* функции  $f(x)$  при стремлении  $x$  к точке  $a$  слева (т. е. по значениям  $x < a$ ), если для любого  $\varepsilon > 0$  найдется такое  $\delta > 0$ , что для всех  $x$ , удовлетворяющих неравенству  $-\delta < x - a < 0$ , выполняется неравенство  $|f(x) - C| < \varepsilon$ .

Обозначение левого предела:  $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = C$ .

Из определения предела функции вытекает следующее утверждение: *если предел функции в точке  $a$  существует, то существуют и равны между собой левый и правый пределы функции в этой точке*. Верно и обратное: *если левый и правый пределы функции в точке существуют и равны числу  $A$ , то предел функции в точке  $a$  существует и также равен  $A$* .

Рассмотрим функцию  $y = \frac{1}{x}$  в окрестности точки  $x=0$ . Для такой функции в точке  $x=0$  не существует никакого конечного предела. В этом случае вводят специальное определение предела.

**О п р е д е л е н и е 3.** Говорят, что  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ , если для лю-

бого числа  $D > 0$  найдется такое число  $\delta > 0$ , что для всех  $x$ , удовлетворяющих неравенству  $0 < |x - a| < \delta$ , выполняется неравенство  $|f(x)| > D$ , а функцию  $f(x)$  при  $x \rightarrow a$  в этом случае называют *бесконечно большой*.

Вместо записи  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$  употребляется и такая запись:

$f(x) \rightarrow \infty$  при  $x \rightarrow a$  ( $f(x)$  стремится к бесконечности, когда  $x$  стремится к  $a$ ). По существу, тем самым к множеству  $\mathbf{R}$  действительных чисел присоединяют число, большее любого действительного числа, так что окрестность отвечающей ему бесконечно удаленной точки оси ординат есть множество чисел  $y$ , для которых  $|y| > D$ , где  $D$  — любое положительное число. (Окрестность бесконечно удаленной точки оси ординат и саму эту точку можно наглядно представить себе, если вообразить, что концы оси  $y$  соединены. Тогда точка соединения и окажется бесконечно удаленной точкой.) Неравенство  $|y| > D$  распадается на два неравенства  $y > D$  и  $y < -D$ , что графически означает наличие двух полукрестностей. Таким образом, бесконечно удаленная точка оси  $y$  «раздваивается» на две точки, которые обозначают  $+\infty$  и  $-\infty$ . Аналогично, бесконечно удаленная точка оси  $x$  «раздваивается» на две точки  $+\infty$  и  $-\infty$ , каждая из которых имеет свою полукрестность.

Очень важным понятием в теории пределов является понятие бесконечно малой.

**О п р е д е л е н и е 4.** Функция  $\alpha(x)$  называется *бесконечно малой* при  $x$ , стремящемся к  $a$ , если  $\lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) = 0$ .

Таковы, например, функции  $\sin x$ ,  $\ln(1+x)$ ,  $x^2$ ,  $\operatorname{tg} x$ ,  $\arcsin x$ ,  $\operatorname{arctg} x$  при  $x \rightarrow 0$ ;  $\ln x$  при  $x \rightarrow 1$ ;  $\cos x$  при  $x \rightarrow \pi/2$ .

Особо выделим понятие функции, бесконечно малой на бесконечности.

**О п р е д е л е н и е 5.** Функция  $\alpha(x)$  называется *бесконечно малой на бесконечности*, если  $\lim_{x \rightarrow \infty} \alpha(x) = 0$ .

Согласно определению, значения функции  $\alpha(x)$  по абсолютной величине становятся и продолжают оставаться меньше любого наперед заданного положительного числа, как только значения аргумента по абсолютной величине становятся достаточно большими.

## § 4. Непрерывность

Если при постепенном изменении аргумента функции также меняется постепенно, то говорят, что функция *непрерывна*. При этом малому изменению аргумента отвечает малое изменение функции. Дадим строгое определение.

**О п р е д е л е н и е 1.** Функция  $y = f(x)$  называется *непрерывной в точке  $x_0$* , если она определена в некоторой окрестности этой точки (включая саму точку) и предел функции в точке  $x_0$  существует и равен значению функции в самой этой точке, т. е.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A = f(x_0) = f(\lim_{x \rightarrow x_0} x).$$

Из определения следует, что приращение функции  $\Delta f(x) = f(x) - f(x_0)$  стремится к нулю при приращении аргумента  $\Delta x$ , стремящемся к нулю, т. е.  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} [f(x) - f(x_0)] = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0$ .

**О п р е д е л е н и е 2.** Функция  $y = f(x)$  называется *непрерывной на интервале*, если она определена на этом интервале и непрерывна в каждой точке интервала.

Геометрически непрерывность функции на интервале означает, что график этой функции на данном интервале есть сплошная линия без скачков и разрывов. Другими словами, отдельные точки на графике непрерывной (на интервале) функции можно (на данном интервале) соединить сплошной линией.

Говорят, что точка  $x_0$  есть *точка разрыва* для функции  $y = f(x)$ , если функция существует в окрестности этой точки (в самой точке  $x_0$  функция может существовать, а может и не существовать), но в точке  $x_0$  не выполняются условия непрерывности. Это означает, что:

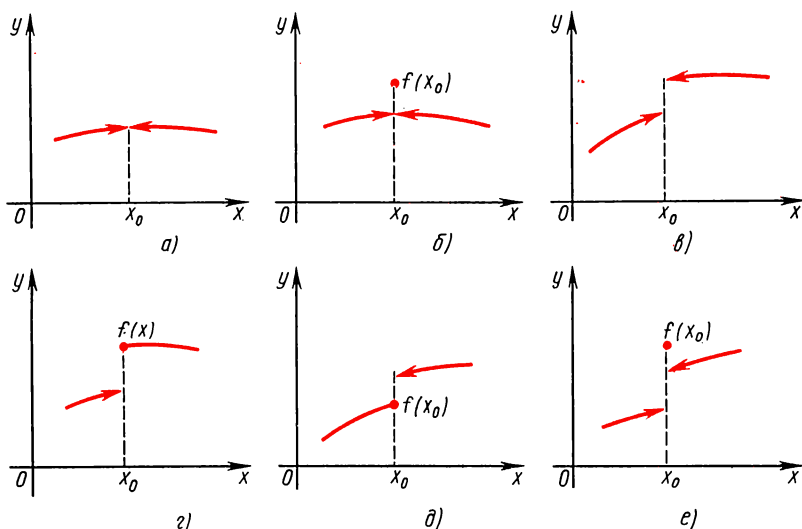


Рис. 11

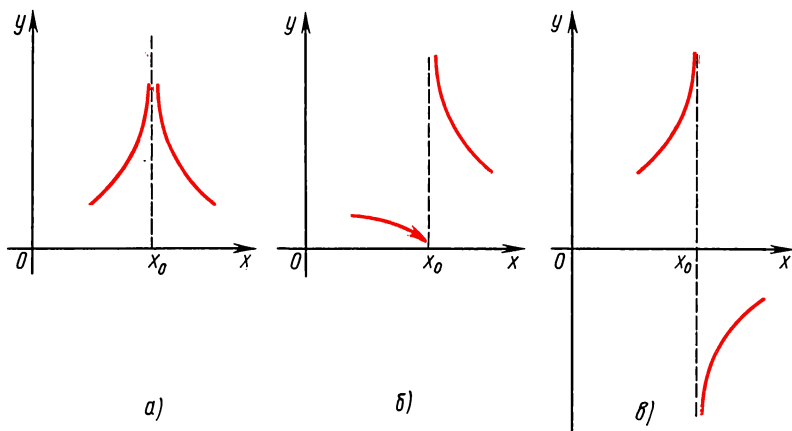


Рис. 12

1) либо оба предела (слева и справа) существуют, конечны и равны между собой, но в самой точке  $x_0$  функция не определена (рис. 11, а);

2) либо оба предела существуют, конечны и равны между собой, но значение функции в самой точке  $x_0$  не равно общему значению пределов (рис. 11, б);

3) либо оба предела существуют, конечны и не равны между собой, причем значение функции в точке  $x_0$  может быть не определено (рис. 11, в) или определено (рис. 11, г—е). Во всех указанных случаях говорят, что функция имеет в точке  $x_0$  *разрыв I рода*.

Если функция  $y=f(x)$  определена в окрестности точки  $x_0$ , за исключением, быть может, самой точки  $x_0$ , и имеет разрыв в точке  $x_0$ , не являющийся разрывом I рода, то говорят, что функция  $y=f(x)$  имеет в точке  $x_0$  *разрыв II рода*. Некоторые (но не все) примеры точек разрыва второго рода представлены на рис. 12, а—в.

**Примеры точек разрыва.** 1. Функция  $y=\frac{\sin x}{x}$  непрерывна на всей числовой оси, кроме точки  $x=0$ , в которой функция не определена. Следовательно,  $x=0$  есть точка разрыва I рода функции  $y=\frac{\sin x}{x}$ . Поскольку  $\lim_{x \rightarrow 0-0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{\sin x}{x} = 1$ , функцию можно доопределить по непрерывности так:

$$y = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{при } x \neq 0, \\ 1 & \text{при } x = 0. \end{cases}$$

Определенная таким образом функция непрерывна на всей числовой оси.

2. Точкой разрыва I рода функции  $y=\frac{2^{1/x}}{2^{1/x}+1}$  служит точка  $x=0$ , в которой пределы функции слева и справа существуют, но не равны между собой, т. е. предел функции в точке  $x=0$  не существует.

Действительно,

$$\lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{2^{1/x}}{2^{1/x} + 1} = \lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{1}{1 + \frac{1}{2^{1/x}}} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0-0} \frac{2^{1/x}}{2^{1/x} + 1} = 0.$$

3. Точками разрыва функции  $y = \frac{1}{x^2 - 1}$  служат точки  $x=1$  и  $x=-1$ , в которых не выполняется определение непрерывности функции.

Отметим, что

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{1}{x^2 - 1} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{1}{x^2 - 1} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -1-0} \frac{1}{x^2 - 1} = +\infty, \\ \lim_{x \rightarrow -1+0} \frac{1}{x^2 - 1} = -\infty.$$

Поэтому  $x=-1$  и  $x=1$  являются точками разрыва II рода.

#### 4. Функция

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0, \\ \sin \frac{1}{x} & \text{при } x > 0 \end{cases}$$

имеет в точке  $x=0$  разрыв II рода, поскольку хотя для нее и имеет смысл число  $g(0-0)=0$ , но не имеет смысла число  $g(0+0) = \lim_{x \rightarrow 0+0} \sin \frac{1}{x}$

### § 5. Асимптоты

**Определение 1.** Если расстояние  $\delta$  от точки  $M$  кривой  $y=f(x)$  до некоторой определенной прямой при  $x \rightarrow x_0$  и неограниченном удалении точки  $M$  от начала координат стремится к нулю, то эта прямая называется *асимптотой* кривой.

Различают вертикальные, горизонтальные и наклонные асимптоты.

Если в определении асимптоты  $x_0$  — конечное число, то соответствующую асимптоту называют *вертикальной* (рис. 13). При этом в точке  $x_0$  хотя бы один из пределов (левый или правый) должен быть равен  $+\infty$  или  $-\infty$ . Поэтому вертикальные асимптоты следует искать в точках разрыва функции.

Если в определении асимптоты  $x_0$  есть  $+\infty$  или  $-\infty$ , то соответствующая асимптота является либо горизонтальной (рис. 14), либо наклонной (рис. 15).

Говорят, что прямая  $y=b$  служит *горизонтальной асимптотой* для графика функции  $y=f(x)$ , если  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) =$

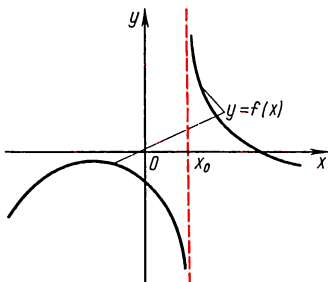


Рис. 13

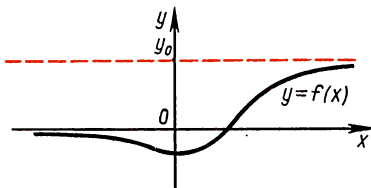


Рис. 14

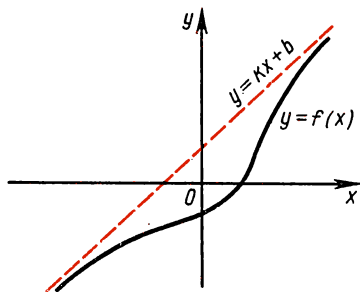


Рис. 15

$= \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b$ . Если же равен числу  $b$  только один из этих пределов, то прямая  $y=b$  является горизонтальной асимптотой соответствующей части графика функции  $y=f(x)$ , т. е. при  $x \rightarrow +\infty$  или при  $x \rightarrow -\infty$ .

Приведем строгие определения вертикальной и наклонной асимптот:

**Определение 2.** Прямая  $x=a$  называется *вертикальной асимптотой* графика функции  $y=f(x)$ , если хотя бы один из пределов  $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x)$  или  $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x)$  равен  $+\infty$  или  $-\infty$ .

**Определение 3.** Прямая  $Y=kx+b$  называется *наклонной асимптотой* графика функции  $y=f(x)$  при  $x \rightarrow +\infty$  (соответственно при  $x \rightarrow -\infty$ ), если  $f(x)$  представима в виде  $f(x) = kx + b + \alpha(x)$ , где  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \alpha(x) = 0$  (соответственно  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \alpha(x) = 0$ ).

**Замечание.** Если  $k=0$ , то наклонная асимптота превращается в горизонтальную.

**Примеры горизонтальных и вертикальных асимптот.** 1. Пусть  $y = 4 + \frac{1}{x}$ .

Находим  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(4 + \frac{1}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(4 + \frac{1}{x}\right) = 4$ ; поэтому  $y=4$  — горизонтальная асимптота графика данной функции. Далее, так как  $\lim_{x \rightarrow 0+0} \left(4 + \frac{1}{x}\right) = +\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0-0} \left(4 + \frac{1}{x}\right) = -\infty$ , то  $x=0$  — вертикальная асимптота.

2. Пусть  $y = 2^{1/x}$ . Здесь  $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2^{1/x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2^{1/x} = 1$  и, значит,  $y=1$  — горизонтальная асимптота графика данной функции. Отметим, что ось ординат является вертикальной асимптотой. Действительно,  $\lim_{x \rightarrow 0-0} 2^{1/x} = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0+0} 2^{1/x} = +\infty$ .

3. Пусть  $y = 2^{-x}$ . Так как  $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2^{-x} = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} 2^{-x} = +\infty$ , то  $y=0$  — горизонтальная асимптота графика данной функции при  $x \rightarrow +\infty$ .

Прямая  $y=kx+b$  служит наклонной асимптотой графика функции  $y=f(x)$ , если выполняются следующие условия:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = k; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - kx] = \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - kx] = b.$$

Если же эти условия выполняются только при  $x \rightarrow +\infty$  или только при  $x \rightarrow -\infty$ , то прямая  $y=kx+b$  является наклонной асимптотой соответствующей части графика функции  $y=f(x)$

**Примеры наклонных асимптот.** 1. Пусть  $y = x + \frac{1}{x}$ . Имеем

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \frac{1}{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{x^2} \right) = 1,$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} (y - kx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( x + \frac{1}{x} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0.$$

Прямая  $y=x$  служит наклонной асимптотой графика данной функции.

2. Пусть  $y = \frac{|x|(x-1)}{x+1}$ . Здесь следует рассмотреть два случая:  $x > 0$  и  $x < 0$ . Если  $x > 0$ , то

$$k_1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|x|(x-1)}{x(x+1)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(x-1)}{x(x+1)} = 1,$$

$$\begin{aligned} b_1 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (y - k_1 x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{|x|(x-1)}{x+1} - x \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(x-1) - x(x+1)}{x+1} = -2, \end{aligned}$$

т. е. прямая  $y=x-2$  является наклонной асимптотой правой ветви графика данной функции.

Если же  $x < 0$ , то

$$k_2 = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x|(x-1)}{x(x+1)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(-x)(x-1)}{x(x+1)} = -1,$$

$$b_2 = \lim_{x \rightarrow -\infty} (y - k_2 x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{|x|(x-1)}{x+1} + x \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(-x)(x-1) + x(x+1)}{x+1} = 2,$$

т. е. прямая  $y=-x+2$  является наклонной асимптотой левой ветви графика данной функции.

## § 6. Отыскание интервалов монотонности и экстремумов функции

**1. Производная.** **О п р е д е л е н и е.** Предел отношения приращения функции  $\Delta y = y - y_0$  к приращению аргумента

$\Delta x = x - x_0$  при  $\Delta x$ , стремящемся к нулю, называется *производной* и обозначается так:

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

При этом подразумевается, что указанный предел существует. Геометрически производная функции  $y = f(x)$  в точке  $x_0$  равна угловому коэффициенту касательной, проведенной к кривой  $y = f(x)$  в точке  $(x_0; y_0)$ , или, что то же самое, тангенсу угла наклона указанной касательной к оси  $x$ , т. е.  $\operatorname{tg} \alpha$  (рис. 16).

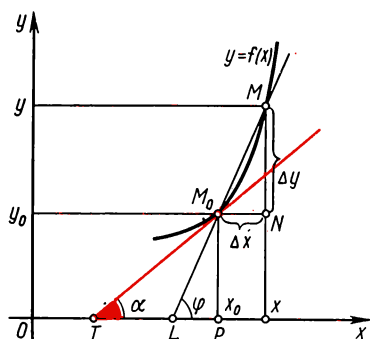


Рис. 16

Отметим, что если функция в точке  $x_0$  имеет производную, то в этой точке функция непрерывна.

Если функция имеет производную во всех точках некоторого интервала, то она непрерывна на данном интервале. Таким образом, чтобы доказать непрерывность функции на некотором интервале, часто бывает удобно вычислить производную этой функции и показать, что она существует на данном интервале. Однако если производная в точке не существует, то последнее не означает, что функция в этой точке обязательно разрывна. Непрерывная в точке функция может и не иметь в этой точке производной. Такова, например, функция  $y = |x|$  в точке  $x = 0$ .

## 2. Достаточное условие монотонности функции на интервале.

Пусть  $y = f(x)$  имеет производную на некотором интервале. Тогда:

- 1) если  $f'(x) > 0$  для всех  $x$  из интервала  $(a, b)$ , то  $f(x)$  монотонно возрастает на нем (рис. 17, а);
- 2) если  $f'(x) < 0$  для всех  $x$  из интервала  $(a, b)$ , то  $f(x)$  монотонно убывает на нем (рис. 17, б);
- 3) если  $f'(x) \equiv 0$  для всех  $x$  из интервала  $(a, b)$ , то  $f(x) \equiv \text{const}$  на нем (рис. 18).

Условие  $f'(x) > 0$  ( $\operatorname{tg} \alpha > 0$ ) в каждой точке интервала геометриче-

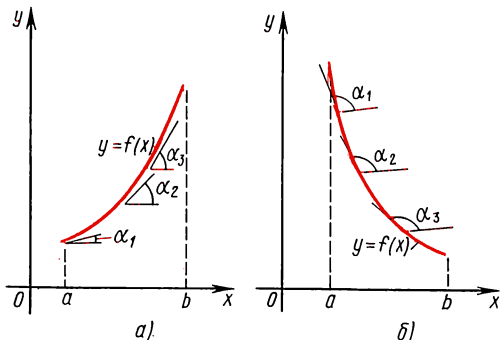


Рис. 17

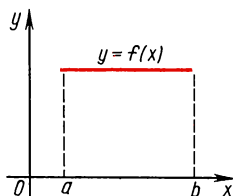


Рис. 18



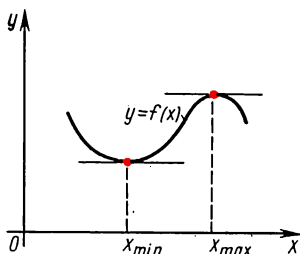


Рис. 19

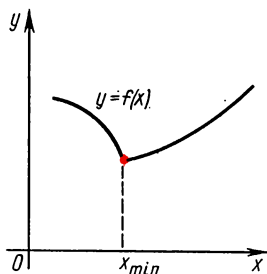


Рис. 20

ски означает, что касательная к кривой в любой ее точке образует с положительным направлением оси абсцисс острый угол (рис. 17, а), а условие  $f'(x) < 0$  ( $\text{tg } \alpha < 0$ ) — тупой угол (рис. 17, б).

Таким образом, для исследования функции на монотонность необходимо найти производную (там, где она существует, функция заведомо непрерывна) и определить интервалы, на которых производная положительна (здесь функция монотонно возрастает) и отрицательна (здесь функция монотонно убывает). Знание производной на интервале позволяет также решить вопрос о существовании и отыскании экстремальных точек.

**3. Необходимое условие существования экстремума.** Если функция  $y=f(x)$  в точке  $x_0$  достигает экстремума, то производная  $f'(x_0)$  либо равна нулю (рис. 19), либо не существует (рис. 20).

Точки, в которых производная обращается в нуль или не существует, называют *критическими*. В этих точках экстремум может существовать, но может и не существовать. Этот вопрос решается с помощью следующего признака (так называемого «правила знаков»).

**4. Первый достаточный признак существования экстремума.** Пусть функция  $y=f(x)$  определена и непрерывна в некоторой окрестности точки  $x_0$ , включая саму точку, и производная  $f'(x)$  существует в окрестности этой точки, за исключением, быть может, самой точки  $x_0$ . Тогда:

- 1) если  $f'(x) > 0$  (знак +) при  $x < x_0$  и  $f'(x) < 0$  (знак —) при  $x > x_0$ , то функция в точке  $x_0$  достигает максимума;
- 2) если  $f'(x) < 0$  (знак —) при  $x < x_0$  и  $f'(x) > 0$  (знак +) при  $x > x_0$ , то функция в точке  $x_0$  достигает минимума;
- 3) если  $f'(x)$  не меняет знак, то экстремума нет.

Другими словами, если производная меняет знак в окрестности точки  $x_0$ , то в этой точке имеется экстремум.

Таким образом, точка максимума отделяет участок монотонного возрастания функции от участка монотонного убывания, а точка минимума — участок монотонного убывания от участка монотонного возрастания (если движение происходит в положительном направлении оси абсцисс).

**5. Алгоритм применения производной для отыскания интервалов монотонности и экстремумов.** При нахождении интервалов моно-

тонности и экстремумов функции с помощью производной используют следующую схему:

- 1<sup>0</sup>. Находят производную  $f'(x)$ .
- 2<sup>0</sup>. Находят интервалы знакопостоянства производной  $f'(x)$  [интервалы монотонности функции  $f(x)$ ], т. е. решают неравенства  $f'(x) > 0$  и  $f'(x) < 0$ .
- 3<sup>0</sup>. Находят критические точки I рода, т. е. точки, в которых  $f'(x)$  либо равна нулю, либо не существует.
- 4<sup>0</sup>. С помощью достаточного признака исследуют функцию в критических точках I рода на экстремум.
- 5<sup>0</sup>. Вычисляют значения функции в экстремальных точках.

**Примеры исследования функций на экстремум.** 1.  $y = \frac{1}{x^2 + 1}$ .

1<sup>0</sup> Находим производную:  $y' = -\frac{2x}{(x^2 + 1)^2}$ .

2<sup>0</sup>. Решаем неравенства  $y' > 0$  и  $y' < 0$ . Имеем:  $y' > 0$  или  $\frac{-2x}{(x^2 + 1)^2} > 0$ , откуда  $x < 0$ ; таким образом, при  $x < 0$  производная положительна (знак +);  $y' < 0$ , откуда  $x > 0$ , т. е. при  $x > 0$  производная отрицательна (знак -). Поэтому на интервале  $(-\infty, 0)$  функция монотонно возрастает, а на интервале  $(0, +\infty)$  — монотонно убывает.

3<sup>0</sup>. Приравнявая производную нулю, находим критическую точку I рода:  $y' = -\frac{2x}{(x^2 + 1)^2} = 0$ , откуда  $x = 0$ .

4<sup>0</sup> При использовании достаточного признака удобно воспользоваться схемой, изображенной на рис. 21 (стрелками ↗ и ↘ обозначены монотонное возрастание и убывание функции на соответствующих интервалах). Из этой схемы следует, что в точке  $x = 0$  функция имеет максимум (производная меняет знак с + на -).

5<sup>0</sup> Вычисляем значение функции в точке максимума: при  $x = x_{\max} = 0$  имеем  $y = y_{\max} = \frac{1}{x^2 + 1} = 1$ .

2.  $y = (x^2 - 4x + 3)^2$ .

1<sup>0</sup> Находим производную:  $y' = 2(x^2 - 4x + 3)(2x - 4)$ .

2<sup>0</sup> Решаем неравенства  $y' > 0$  и  $y' < 0$ . Имеем:  $y' > 0$  или  $2(x^2 - 4x + 3) \times (2x - 4) > 0$ , т. е.  $(x - 1)(x - 2)(x - 3) > 0$  и окончательно получим  $1 < x < 2$ ,  $x > 3$ ;  $y' < 0$ , откуда  $x < 1$ ,  $2 < x < 3$ . Значит, на интервалах  $(-\infty, 1) \cup (2, 3)$  функция монотонно убывает, а на интервалах  $(1, 2) \cup (3, +\infty)$  — монотонно возрастает.

3<sup>0</sup>. Приравнявая производную ну-

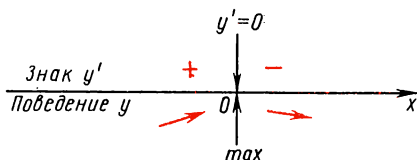


Рис. 21

лю, находим критические точки I рода:  $y' = 2(x^2 - 4x + 3) = 0$ , откуда  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = 2$ ,  $x_3 = 3$ .

4<sup>0</sup> Рисуем схему (рис. 22), из которой следует, что в точке  $x = 1$  функция имеет минимум, в точке  $x = 2$  — максимум, в точке  $x = 3$  — минимум.

5<sup>0</sup> Находим значения функции в экстремальных точках: если  $x = x_{\min} = 1$ , то  $y = y_{\min} = 0$ ; если  $x = x_{\max} = 2$ , то  $y = y_{\max} = 1$ ; если  $x = x_{\min} = 3$ , то  $y = y_{\min} = 0$ .

---

$$3. y = \sqrt[3]{x^2 - 1}$$

---

1<sup>0</sup> Находим производную:  $y' = \frac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2 - 1)^2}}$ .

2<sup>0</sup> Решаем неравенства  $y' > 0$  и  $y' < 0$ . Имеем:  $y' > 0$  или  $\frac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2 - 1)^2}} > 0$ , откуда  $x > 0$ ,  $x \neq 1$ ;  $y' < 0$ , откуда  $x < 0$ ,  $x \neq -1$ . Поэтому на интервалах  $(-\infty, -1) \cup (-1, 0)$  функция монотонно убывает, а на интервалах  $(0, 1) \cup (1, +\infty)$  — монотонно возрастает.

3<sup>0</sup> Производная равна нулю в точке  $x = 0$  и не существует в точках  $x = -1$ ,  $x = 1$ . Таким образом, имеем три критические точки I рода:  $x_1 = -1$ ,  $x_2 = 0$ ,  $x_3 = 1$ .

4<sup>0</sup> Рисуем схему (рис. 23), из которой следует, что, в точке  $x_2 = 0$  функция имеет минимум, а в точках  $x_1 = -1$  и  $x_3 = 1$  экстремума нет.

5<sup>0</sup> Находим значения функции в экстремальной точке: при  $x = x_{\min} = 0$  имеем  $y = y_{\min} = -1$ .

З а м е ч а н и е. Поскольку производная  $y'$  может менять знак только в критических точках, вместо решения неравенств  $y' > 0$  или  $y' < 0$  удобно определять знак  $y'$  в произвольной точке рассматриваемого интервала. Так, в примере 1 находим  $y'(-1) > 0$ , а  $y'(1) < 0$ ; в примере 2:  $y'(0) < 0$ ,  $y'(1,5) > 0$ ,  $y(2,5) < 0$ ,  $y'(10) > 0$ ; в примере 3:  $y'(-2) < 0$ ,  $y'(-0,5) < 0$ ,  $y'(0,5) > 0$ ,  $y'(2) > 0$ .

На практике алгоритм применения производной для отыскания интервалов монотонности и экстремумов выглядит так:

1<sup>0</sup> Находят производную  $f'(x)$ .

2<sup>0</sup> Находят критические точки I рода, т. е. точки, в которых  $f'(x)$  либо равна нулю, либо не существует.

3<sup>0</sup> Так как критические точки разбивают всю область определения функции на непересекающиеся интервалы, то в каждом из интервалов берут произвольную точку и определяют знак производной.

4<sup>0</sup> Рисуют схему, определяют наличие и характер экстремумов.

5<sup>0</sup> Вычисляют значения функции в экстремальных точках.

Если производная  $y'$  существует на некотором интервале  $X$ , то тем самым каждому  $x$  из этого интервала ставится в соответствие производная данной функции. Это однозначное соответствие

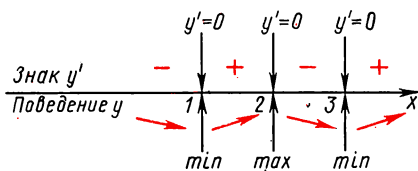


Рис. 22

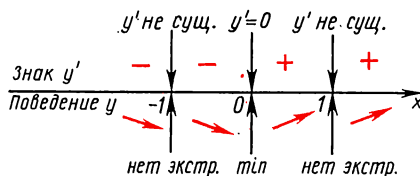


Рис. 23

является новой функцией. Может оказаться, что для указанной новой функции в некоторой точке  $x_0 \in X$  существует производная. Тогда эта производная называется *второй производной* от первоначальной функции в упомянутой точке и обозначается символом  $y''(x_0)$  или  $f''(x_0)$ .

Применение второй производной для отыскания экстремума функции основано на следующем признаке.

**6. Второй достаточный признак существования экстремума.** Пусть функция  $y = f(x)$  имеет в данной критической точке  $x_0$  вторую производную. Тогда если  $y''(x_0) < 0$ , то функция имеет в точке  $x_0$  локальный максимум, а если  $y''(x_0) > 0$  — локальный минимум.

Найдем, например, точки экстремума функции  $y = x^3 - 3x^2 - 4$ . Критическими точками этой функции являются точки  $x = 0$  и  $x = 2$ , в которых производная  $y' = 3x^2 - 6x$  обращается в нуль. Так как  $y'' = 6x - 6$ , то  $y''(0) = -6$ , а  $y''(2) = 6$ . Следовательно, функция имеет максимум в точке  $x = 0$  и минимум в точке  $x = 2$ . Экстремальные значения этой функции таковы:  $y_{\max} = y(0) = -4$ ,  $y_{\min} = y(2) = -8$ .

## § 7. Отыскание интервалов выпуклости и точек перегиба

**1. Достаточное условие выпуклости функции на интервале.** Если вторая производная  $f''(x)$  существует на интервале  $(a, b)$  и не меняет знак на этом интервале, то:

1) при  $f''(x) > 0$  (знак  $+$ ) функция  $f(x)$  выпукла вниз на интервале  $(a, b)$ ;

2) при  $f''(x) < 0$  (знак  $-$ ) функция  $f(x)$  выпукла вверх на интервале  $(a, b)$ .

Это утверждение, называемое «правилом дождя», символически означает, что если кривая выпукла вниз, то идущий дождь как бы заполняет ее (знак  $+$ ), а если кривая выпукла вверх, то капли дождя как бы стекают с нее (знак  $-$ ).

Таким образом, для нахождения интервалов выпуклости вверх и выпуклости вниз функции нужно найти вторую производную и решить неравенства  $f''(x) < 0$  и  $f''(x) > 0$ .

**З а м е ч а н и е.** Вместо решения неравенств удобно вычислять значения  $f''(x)$  в отдельных точках, взяв по произвольной точке из каждого интервала знакопостоянства  $f''(x)$ .

**О п р е д е л е н и е.** Точка  $M_0(x_0; f(x_0))$  графика функции  $y = f(x)$  называется *точкой перегиба* этого графика, если су-

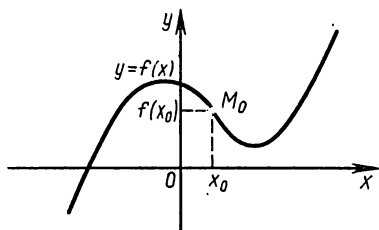


Рис. 24

существует такая окрестность точки  $x_0$ , в пределах которой график функции  $y=f(x)$  слева и справа от  $M_0$  имеет разные направления выпуклости.

На рис. 24 изображен график функции, имеющий перегиб в точке  $M_0(x_0; f(x_0))$ .

## 2. Необходимый признак существования точки перегиба. Если функ-

ция в точке  $x_0$  имеет перегиб, то вторая производная в этой точке либо не существует, либо равна нулю.

Точки, в которых вторая производная обращается в нуль или не существует, называют *критическими точками II рода*. В этих точках перегиб может быть, а может и не быть. Этот вопрос решается с помощью следующего признака.

**3. Достаточный признак существования точки перегиба.** Пусть функция определена и непрерывна в некоторой окрестности точки  $x_0$ , включая саму точку. Пусть, далее, вторая производная в этой точке равна нулю или не существует. Тогда если  $f''(x) < 0$  при  $x < x_0$  и  $f''(x) > 0$  при  $x > x_0$  или  $f''(x) > 0$  при  $x < x_0$  и  $f''(x) < 0$  при  $x > x_0$ , то  $M_0(x_0, f(x_0))$  является точкой перегиба кривой  $y=f(x)$ .

Алгоритм применения второй производной для отыскания интервалов выпуклости вверх и вниз и точек перегиба совершенно аналогичен алгоритму отыскания экстремумов и интервалов монотонности, только вместо первой производной рассматривается вторая.

## Примеры исследования функций на выпуклость и точки перегиба.

1.  $y = \frac{1}{x^2 + 1}$ .

1<sup>o</sup> Находим вторую производную:  $y'' = \frac{2(3x^2 - 1)}{(x^2 + 1)^3}$ .

2<sup>o</sup> Решаем неравенства  $y'' > 0$  и  $y'' < 0$ . Имеем:  $y'' > 0$  или  $\frac{2(3x^2 - 1)}{(x^2 + 1)^3} > 0$ , откуда  $x < -\frac{1}{\sqrt{3}}$ ,  $x > \frac{1}{\sqrt{3}}$ ;  $y'' < 0$ , откуда  $-\frac{1}{\sqrt{3}} < x < \frac{1}{\sqrt{3}}$ .

3<sup>o</sup> Приравнивая вторую производную нулю, находим критические точки II рода:  $y'' = \frac{2(3x^2 - 1)}{(x^2 + 1)^3} = 0$ , откуда  $x_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ ,  $x_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}$ .

4<sup>o</sup> Из схемы (рис. 25) следует, что в точках  $x_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ ,  $x_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}$  функция имеет перегибы. На интервалах  $(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{3}}) \cup (\frac{1}{\sqrt{3}}, +\infty)$  функция выпукла вниз, а на интервале  $(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$  — выпукла вверх.



Рис. 25



Рис. 26

5°. Находим ординаты точек перегиба: при  $x_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ ,  $x_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}$  имеем  $y_1 = y_2 = \frac{3}{4}$ .

$$2. y' = (x^2 - 4x + 3)^2$$

1°. Находим вторую производную:  $y'' = 12\left(x^2 - 4x + \frac{11}{3}\right)$ .

2°. Решаем неравенства  $y'' > 0$  и  $y'' < 0$ . Имеем:  $y'' > 0$  или  $12\left(x^2 - 4x + \frac{11}{3}\right) > 0$ , откуда  $x < 2 - \frac{1}{\sqrt{3}}$ ,  $x > 2 + \frac{1}{\sqrt{3}}$ ;  $y'' < 0$ , откуда  $2 - \frac{1}{\sqrt{3}} < x < 2 + \frac{1}{\sqrt{3}}$ .

3°. Приравнявая вторую производную нулю, находим критические точки II рода:  $y'' = 12\left(x^2 - 4x + \frac{11}{3}\right) = 0$ , откуда  $x_1 = 2 - \frac{1}{\sqrt{3}}$ ,  $x_2 = 2 + \frac{1}{\sqrt{3}}$ .

4°. Из схемы (рис. 26) следует, что в точках  $x_1 = 2 - \frac{1}{\sqrt{3}}$ ,  $x_2 = 2 + \frac{1}{\sqrt{3}}$  функция имеет перегибы. На интервалах  $\left(-\infty, 2 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \cup \left(2 + \frac{1}{\sqrt{3}}, \infty\right)$  функция выпукла вверх, а на интервале  $\left(2 - \frac{1}{\sqrt{3}}, 2 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$  — выпукла вниз.

5°. Находим ординаты точек перегиба:  $y_1 = (x_1^2 - 4x_1 + 3)^2 = \frac{4}{9}$ ,  $y_2 = \frac{4}{9}$ .

$$3. y = \sqrt[3]{x^2 - 1}$$

1° Находим вторую производную:  $y'' = -\frac{2}{9} \frac{x^2 + 3}{(x^2 - 1)^{5/3}}$ .

2°. Решаем неравенства  $y'' > 0$  и  $y'' < 0$ . Имеем:  $y'' > 0$  или  $-\frac{2}{9} \frac{x^2 + 3}{(x^2 - 1)^{5/3}} > 0$ , откуда  $-1 < x < 1$ ;  $y'' < 0$ , откуда  $x < -1$ ,  $x > 1$ .

3°. В точках  $x_1 = -1$ ,  $x_2 = 1$  вторая производная не существует (знаменатель обращается в нуль); сама же функция в этих точках существует, непрерывна и принимает значение, равное нулю.



Рис. 27

Учитывая, что ни в одной точке действительной оси вторая производная в нуль не обращается, критическими точками II рода являются только точки  $x_1 = -1$ ,  $x_2 = 1$ .

4<sup>0</sup> Из схемы (рис. 27) следует, что в точках  $x_1 = -1$ ,  $x_2 = 1$  функция имеет перегибы. На интервалах  $(-\infty, -1) \cup (1, +3)$  функция выпук-

ла вверх, а на интервале  $(-1, 1)$  — выпукла вниз.

5<sup>0</sup> Находим ординаты точек перегиба:  $y_1 = y_2 = 0$ .

## Раздел II

### ПРОСТЕЙШИЕ ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ФУНКЦИИ

Элементарными функциями называются функции, определяемые формулами, содержащими конечное число операций сложения, вычитания, умножения, деления, возведения в степень, взятия логарифма, вычисления тригонометрических функций.

Знание элементарных функций и их свойств является необходимым условием для изучения поведения всех других функций. Для построения графика функции любой сложности нужно твердо знать графики элементарных функций. В данном разделе будут рассмотрены простейшие элементарные функции.

#### 1. Линейная функция $y = kx + b$ .

Графиком линейной функции является прямая. Этот график удобно строить по двум точкам: точке  $B$  с координатами  $x = 0$ ,  $y = b$  и точке  $A$  с координатами  $y = 0$ ,  $x = -b/k$  ( $k \neq 0$ ) (рис. 28). Эти точки являются точками пересечения прямой с осями координат.

В случае  $b = 0$  прямая проходит через начало координат и для построения графика следует взять еще одну точку, например точку

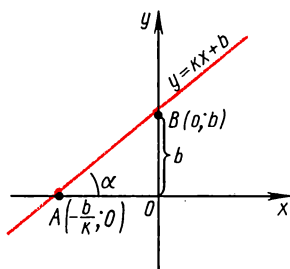


Рис. 28

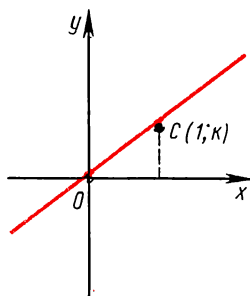


Рис. 29

$C(1; k)$  (рис. 29). В случае  $k=0$  прямая параллельна оси абсцисс.

Коэффициенты  $k$  и  $b$  в уравнении прямой имеют наглядное геометрическое толкование. Значение коэффициента  $b$  определяет отрезок, отсекаемый графиком линейной функции на оси ординат, а коэффициент  $k$  является тангенсом угла  $\alpha$ , образованного осью абсцисс и прямой; угол отсчитывается от положительного направления оси абсцисс против часовой стрелки (см. рис. 28).

Уравнение прямой может быть представлено в различных видах:

$y = y_0 + k(x - x_0)$  — уравнение прямой с заданным угловым коэффициентом  $k$ , проходящей через точку  $M_0(x_0; y_0)$ ;

$\frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$  — уравнение прямой, проходящей через две точки  $M_1(x_1; y_1)$  и  $M_0(x_0; y_0)$  (рис. 30);

$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$  — уравнение прямой в отрезках (рис. 31).

---

## 2. Квадратичная функция $y = ax^2 + bx + c$ .

---

Графиком квадратичной функции является парабола с осью симметрии, параллельной оси ординат, и вершиной в точке  $C$  с координатами  $x_c = \frac{b}{2a}$ ,  $y_c = \frac{4ac - b^2}{4a}$  (рис. 32). Если  $a > 0$ , то ветви параболы направлены вверх, а если  $a < 0$ , то вниз (рис. 33). График пересекает ось ординат в точке  $B(0; c)$ . Функция имеет не более двух нулей.

Рассмотрим один из способов построения графика квадратичной функции, т. е. параболы. Вообще говоря, этот способ основывается на том факте, что три различные точки, принадлежащие параболе, определяют ее единственным образом.

Пусть даны три различные точки, принадлежащие графику квадратичной функции:  $M_1(x_1; y_1)$ ,  $M_2(x_2; y_2)$ ,  $M_3(x_3; y_3)$ . Очевидно, что  $x_1 \neq x_2 \neq x_3$ ; в противном случае найдутся хотя бы две точки параболы, лежащие на прямой, параллельной оси ординат, а это невозможно.

Так как по условию точки принадлежат графику квадратичной функции, то их координаты удовлетворяют уравнению  $y = ax^2 + bx + c$ . Поэтому имеем систему уравнений

$$\begin{cases} y_1 = ax_1^2 + bx_1 + c, \\ y_2 = ax_2^2 + bx_2 + c, \\ y_3 = ax_3^2 + bx_3 + c. \end{cases}$$

Можно доказать, что полученная система трех линейных уравнений с тремя неизвестными  $a$ ,  $b$  и  $c$  в случае  $x_1 \neq x_2 \neq x_3$  имеет единственное решение и определяет тем самым единственную параболу  $y = ax^2 + bx + c$ , где  $a$ ,  $b$  и  $c$  — решение указанной системы.

Для построения параболы  $y = ax^2 + bx + c$  удобно выбрать следующие три точки (рис. 32):



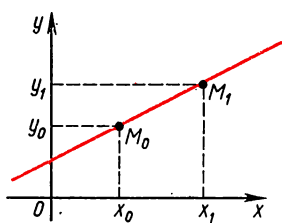


Рис. 30

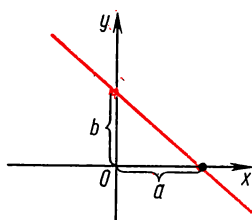


Рис. 31

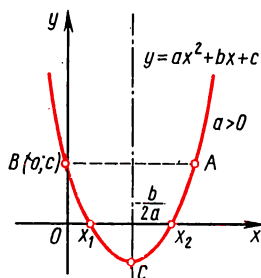


Рис. 32

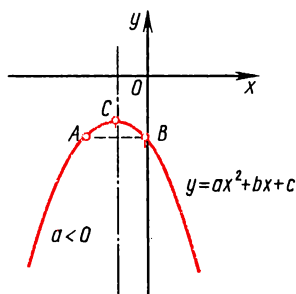


Рис. 33

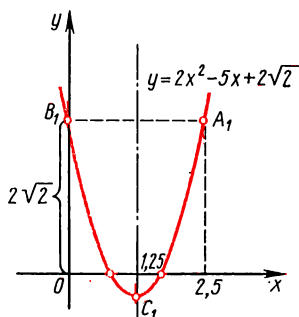


Рис. 34

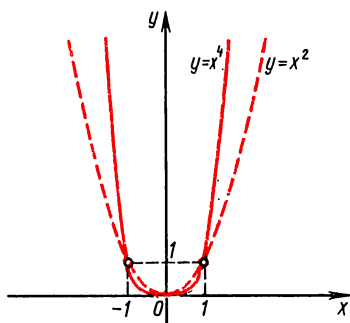


Рис. 35

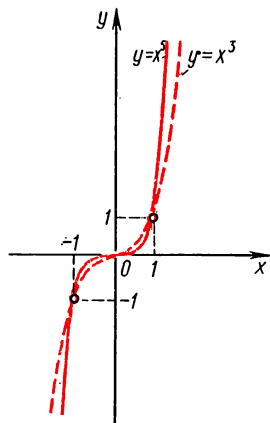


Рис. 36

а) так как при  $x=0$  имеем  $y=c$ , то в качестве первой точки следует взять точку  $B(0, c)$ ;

б) полагая  $y=c$ , получим либо  $x=0$  (это точка  $B$ ), либо  $x=-b/a$ ; таким образом, в качестве второй точки возьмем точку  $A(-b/a; c)$ ;

в) в качестве третьей точки берем вершину параболы  $C(x_c; y_c)$ , где  $x_c = x_A/2 = -b/(2a)$ ,  $y_c = ax_c^2 + bx_c + c$ .

Построим, например, график функции  $y = 2x^2 - 5x + 2\sqrt{2}$ . Отметим три точки:  $B_1(0, 2\sqrt{2})$ ,  $A_1(\frac{5}{2}; 2\sqrt{2})$ ,  $C_1(\frac{5}{4}; 2\sqrt{2} - \frac{13}{4})$ . Учитывая, что парабола симметрична относительно прямой  $x=5/4$ , а ее ветви направлены вверх, получаем искомый график (рис. 34).

### 3. Степенная функция $y=x^a$ .

1)  $\alpha=n$  ( $n \geq 2$  — целое положительное число).

Все графики проходят через точку  $(1; 1)$  и касаются оси абсцисс в начале координат. Если  $n$  — четное число, то функция имеет в точке  $x=0$  минимум и график симметричен относительно оси ординат (рис. 35). Если  $n$  — нечетное число, то функция имеет в точке  $x=0$  перегиб и кривая симметрична относительно начала координат (рис. 36).

2)  $\alpha=-n$  ( $n$  — целое положительное число).

Все графики проходят через точку  $(1; 1)$ , не имеют экстремумов, при четном  $n$  симметричны относительно оси ординат, а при нечетном  $n$  симметричны относительно начала координат. Координатные оси являются асимптотами кривых. При  $n=1$  получаем график обратной пропорциональной зависимости (рис. 37). Графики при  $n=2$  и  $n=3$  изображены на рис. 38.

3)  $\alpha=r$  ( $r=t/n$ ,  $t$  и  $n$  — взаимно простые целые положительные числа).

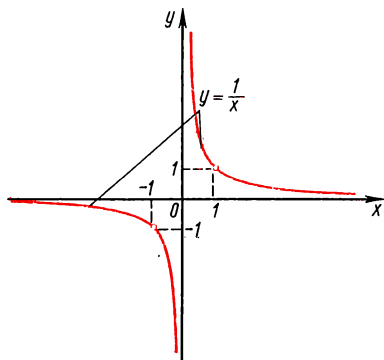


Рис. 37

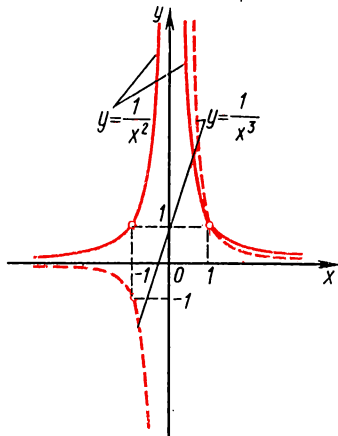


Рис. 38

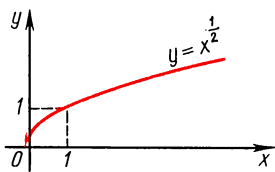


Рис. 39

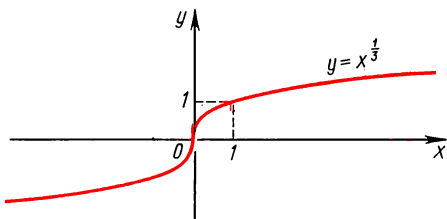


Рис. 40

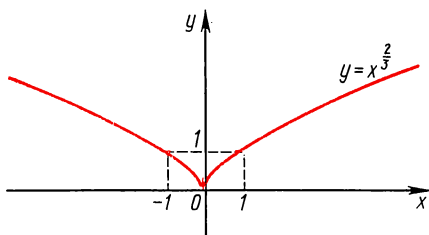


Рис. 41

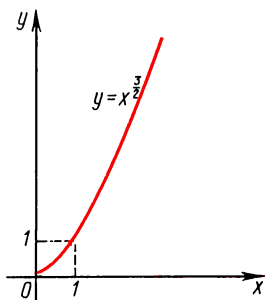


Рис. 42

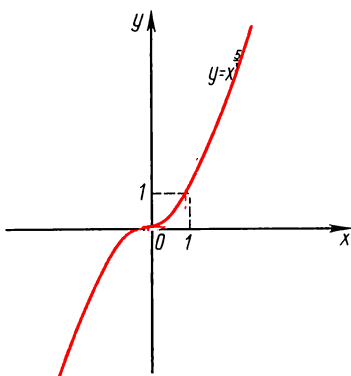


Рис. 43

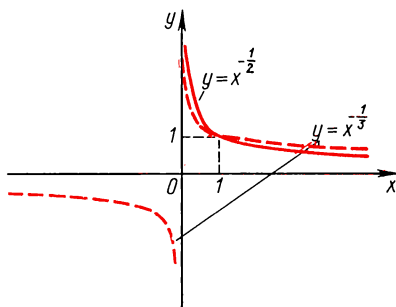


Рис. 44

Все эти функции имеют нуль в начале координат, а их графики проходят через точку  $(1; 1)$ . При четном  $n$  функция определена на  $[0, +\infty)$ , а при нечетном  $n$  — на  $(-\infty, +\infty)$ . Если  $n$  — нечетное, а  $m$  — четное, то график симметричен относительно оси ординат; если  $n$  и  $m$  — нечетные, то график симметричен относительно начала координат. Если  $r < 1$ , то график касается оси  $y$  в начале координат, а если  $r > 1$ , то график в начале координат касается оси  $x$ .

На рис. 39—43 изображены графики функций при  $r = 1/2, 1/3, 2/3, 3/2, 5/3$ .

4)  $\alpha = q = m/n < 0$ ,  $m$  и  $n$  — взаимно простые целые числа,  $n \neq -1$ ).

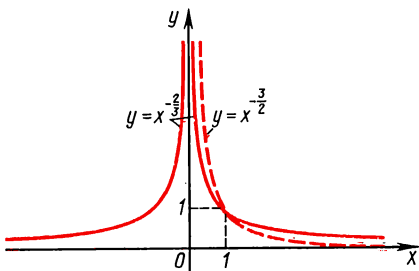


Рис. 45

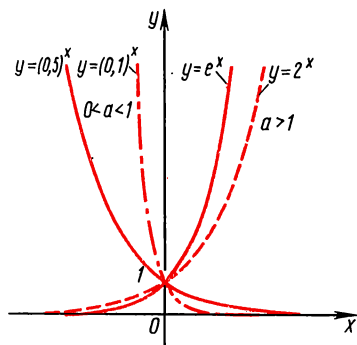


Рис. 46

При четном  $n$  функция определена на  $(0, +\infty)$ , а при нечетном  $n$  — на  $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ . Графики этих функций проходят через точку  $(1; 1)$  и имеют в качестве асимптот оси координат. Если  $n$  — нечетное, а  $m$  — четное, то график симметричен относительно оси ординат, а если  $n$  и  $m$  — нечетные, то график симметричен относительно начала координат.

На рис. 44 и 45 изображены графики функций при  $r = -1/2, -1/3, -2/3, -3/2$ .

#### 4. Показательная функция $y = a^x$ ( $a > 0; a \neq 1$ ).

При  $a > 1$  функция монотонно возрастает, а при  $0 < a < 1$  — монотонно убывает (рис. 46).

#### 5. Логарифмическая функция $y = \log_a x$ ( $a > 0, a \neq 1$ ).

При  $a > 1$  функция монотонно возрастает, а при  $0 < a < 1$  — монотонно убывает (рис. 47).

6. Тригонометрические функции  $y = \sin x$  (рис. 48),  $y = \cos x$  (рис. 49),  $y = \operatorname{tg} x$  (рис. 50),  $y = \operatorname{ctg} x$  (рис. 51).

Эти функции периодические, причем  $\sin x$  и  $\cos x$  имеют период  $T = 2\pi$ , а  $\operatorname{tg} x$  и  $\operatorname{ctg} x$  — период  $T = \pi$ .

Функции  $\sin x$  и  $\cos x$  ограничены:  $|\sin x| \leq 1, |\cos x| \leq 1$ . Функции  $\operatorname{tg} x$  и  $\operatorname{ctg} x$  имеют вертикальные асимптоты при  $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$  для  $\operatorname{tg} x$  и при  $x = \pi n$  для  $\operatorname{ctg} x$ .

#### 7. Арксинус $y = \arcsin x$ .

Эта функция является обратной к функции  $y = \sin x$  на отрезке  $[-\pi/2, \pi/2]$  (рис. 52). Область ее определения  $-1 \leq x \leq 1$ , а область значений  $-\pi/2 \leq y \leq \pi/2$ . Функция монотонно возрастает и

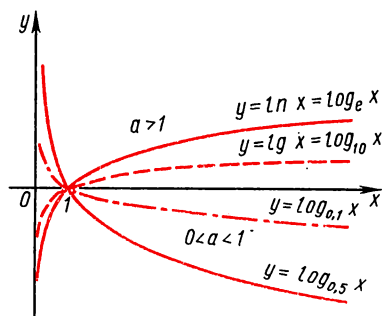


Рис. 47

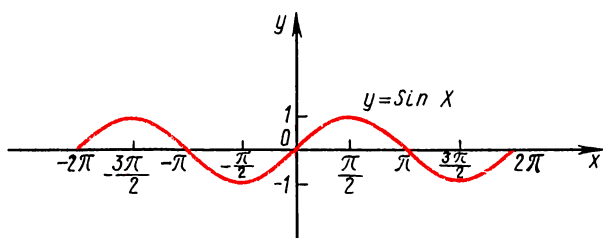


Рис. 48

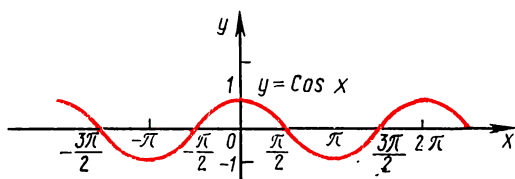


Рис. 49

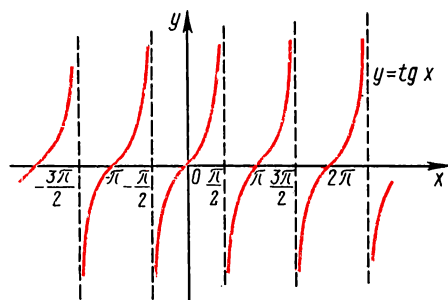


Рис. 50

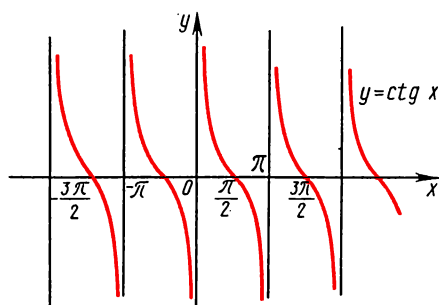


Рис. 51

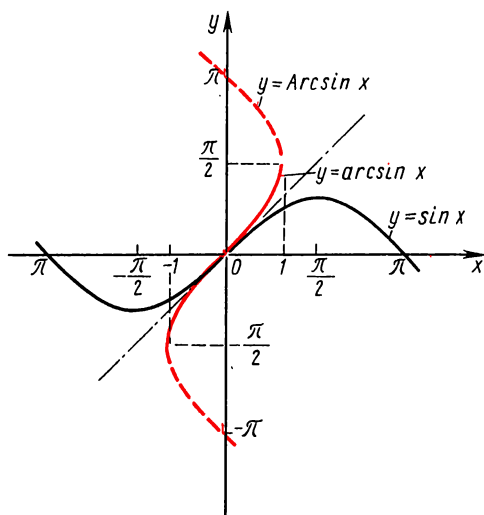


Рис. 52

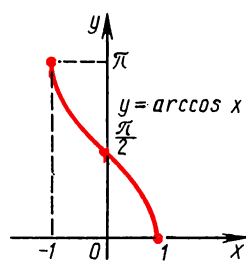


Рис. 53

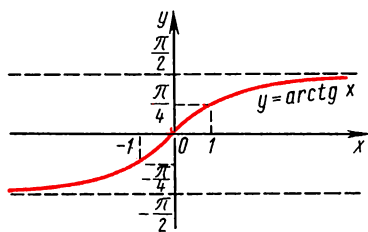


Рис. 54

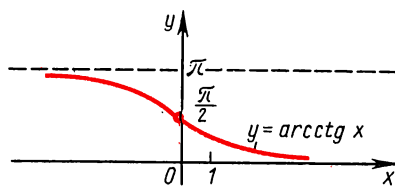


Рис. 55

имеет нуль при  $x=0$ . Начало координат является точкой перегиба.

Отметим, что функция  $y=\sin x$  определена на всей числовой оси, причем ее значения находятся в промежутке  $[-1, 1]$ ; каждому  $y$  из этого промежутка отвечает бесконечное множество значений  $x$ . Поэтому обратная функция, которую обозначают  $x=\operatorname{Arcsin} y$ , является бесконечнозначной. Обычно рассматривают лишь одну ветвь этой функции, отвечающую изменению  $x$  между  $-\pi/2$  и  $\pi/2$ ; каждому  $y$  из промежутка  $[-1, 1]$  отвечает одно значение  $x$ ; его обозначают через  $x=\arcsin y$  и называют главным значением арксинуса.

Отобразив синусоиду симметрично относительно биссектрисы I координатного угла, получаем график многозначной функции  $y=\operatorname{Arcsin} x$ ; сплошной линией выделен график главной ветви ее  $y=\arcsin x$ , которая однозначно определена в промежутке  $[-1, 1]$  и удовлетворяет неравенству  $-\pi/2 \leq \arcsin x \leq \pi/2$ .

---

#### 8. Арккосинус $y=\arccos x$ .

---

Эта функция является обратной к функции  $y=\cos x$  на отрезке  $[0, \pi]$  (рис. 53). Область ее определения  $-1 \leq x \leq 1$ , а область значений  $0 \leq y \leq \pi$ . Функция монотонно убывает. Точка  $(0; \pi/2)$  является точкой перегиба.

---

#### 9. Арктангенс $y=\operatorname{arctg} x$ .

---

Эта функция является обратной к функции  $y=\operatorname{tg} x$  на  $(-\pi/2, \pi/2)$  (рис. 54). Область определения — вся числовая ось, а область значений  $-\pi/2 < y < \pi/2$ . Функция нечетная, монотонно возрастает и имеет нуль при  $x=0$ . Прямые  $y=\pm\pi/2$  являются горизонтальными асимптотами.

---

#### 10. Арккотангенс $y=\operatorname{arccotg} x$ .

---

Эта функция является обратной к функции  $\operatorname{ctg} x$  на  $(0, \pi)$  (рис. 55). Область определения — вся числовая ось, а область значений  $0 < y < \pi$ . Функция монотонно убывает. Прямые  $y=0$  и  $y=\pi$  являются горизонтальными асимптотами.

## Раздел III

### МЕТОДЫ ПОСТРОЕНИЯ ГРАФИКОВ ФУНКЦИЙ БЕЗ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ПРОИЗВОДНОЙ

#### § 1. Простейшие преобразования графиков

**1. Параллельный перенос (сдвиг).** Рассмотрим сначала параллельный перенос вдоль оси абсцисс. Пусть дан график функции  $y=f(x)$ . Как по отношению к нему будет расположен график функции  $y=f(x-a)$ ,  $a>0$ ?

Для всякой точки  $M_0(x_0; y_0)$ , принадлежащей графику функции  $y=f(x-a)$ , точка  $M_1(x_0-a; y_0)$ , смещенная по сравнению с точкой  $M_0(x_0; y_0)$  на  $a$  единиц влево, будет принадлежать графику функции  $y=f(x)$ . В самом деле, это означает, что  $y_0=f(x_0-a)$ . Подобным же образом легко установить, что если точка  $M_2(x_2; y_2)$  принадлежит графику функции  $y=f(x)$ , то точка  $M_3(x_2+a; y_2)$ , смещенная по сравнению с ней на  $a$  единиц вправо, принадлежит графику функции  $y=f(x-a)$ . В самом деле, это означает, что  $y_2=f(x_2)$ . Отсюда заключаем, что если  $a>0$ , то график функции  $y=f(x-a)$  получается из графика функции  $y=f(x)$ , смещением на  $a$  единиц вправо (рис. 56). Ясно, что если  $a<0$ , то график функции  $y=f(x-a)$  получается из графика функции  $y=f(x)$  смещением на  $|a|$  единиц влево.

**З а м е ч а н и е.** Тот же результат можно получить, если перенести ось  $y$  влево (при  $a>0$ ) или соответственно вправо (при  $a<0$ ) на  $|a|$  единиц.

Например, для построения графика функции  $y=\sqrt{x-2}$  сначала строим график функции  $y=\sqrt{x}$ , а затем сдвигаем его вправо на 2 единицы (рис. 57).

Для построения графика функции  $y=\log_{0,5}(x+1,5)$  строим график функции  $y=\log_{0,5}x$  и сдвигаем его влево на 1,5 единицы (рис. 58).

Рассмотрим теперь параллельный перенос вдоль оси ординат. В этом случае график функции  $y=f(x)+b$  получается из графика функции  $y=f(x)$  при  $b>0$  смещением на  $b$  единиц вверх, а при  $b<0$  — на  $|b|$  единиц вниз.

Так, чтобы построить график функции  $y=3^x-1$ , сначала строим график функции  $y=3^x$ , а затем сдвигаем его вниз на единицу (рис. 59).

Для построения графика функции  $y=\sqrt[3]{x}+2$  строим график  $y=\sqrt[3]{x}$  и сдвигаем его вверх на 2 единицы (рис. 60).

**2. Деформация (растяжение и сжатие) графика.** График функции  $y=f(\omega x)$ ,  $\omega>0$  получается из графика функции  $y=f(x)$  «сжатием» к оси  $y$  в  $\omega$  раз при  $\omega>1$  (рис. 61, а) и «растяжением» от оси  $y$  в  $1/\omega$  раз при  $0<\omega<1$  (рис. 61, б).

График функции  $y=kf(x)$ ,  $k>0$  получается из графика функции  $y=f(x)$  «растяжением» от оси  $x$  в  $k$  раз при  $k>1$  (рис. 62, а) и «сжатием» к оси  $x$  в  $1/k$  раз при  $0<k<1$  (рис. 62, б).



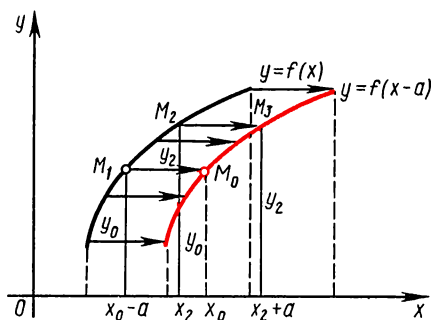


Рис. 56

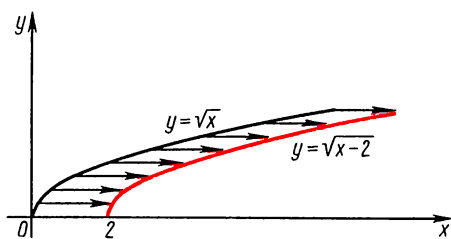


Рис. 57

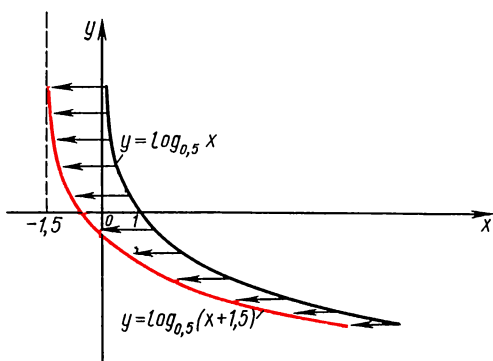


Рис. 58

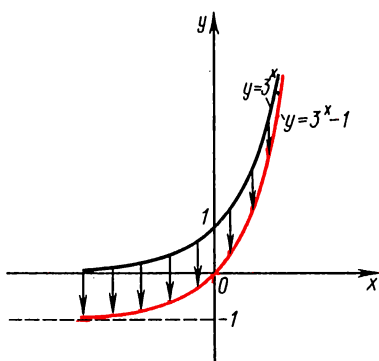


Рис. 59

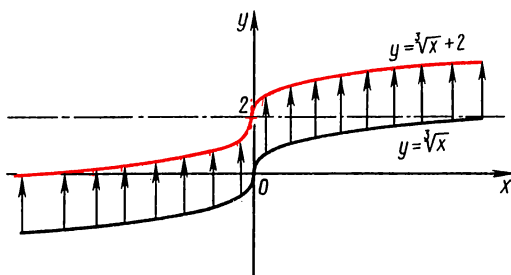


Рис. 60

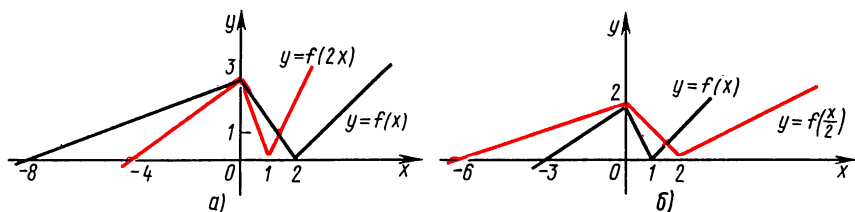


Рис. 61

**З а м е ч а н и е.** Нетрудно показать, что если  $y=f(x)$  — периодическая функция с периодом  $T$ , то функция  $y=f(\omega x)$ ,  $\omega > 0$  является периодической с периодом  $T/\omega$ . В самом деле, так как функция  $f(x)$  имеет период  $T$ , то при любом  $x$  выполняется равенство  $f(x+T)=f(x)$ : Положим  $\varphi(x)=f(\omega x)$ ; тогда для любого  $x$  получим

$$\varphi\left(x + \frac{T}{\omega}\right) = f\left(\omega\left(x + \frac{T}{\omega}\right)\right) = f(\omega x + T) = f(\omega x) = \varphi(x)$$

и, следовательно, функция  $\varphi(x)$  имеет период  $T/\omega$ . Например, функция  $y=\sin 2x$  имеет период  $\frac{2\pi}{2}=\pi$ , а функция  $y=\operatorname{tg} \frac{x}{4}$  — период  $\frac{\pi}{1/4}=4\pi$ .

**3. Отражение.** График функции  $y=-f(x)$  получается зеркальным отражением графика функции  $y=f(x)$  относительно оси  $x$  (рис. 63).

График функции  $y=f(-x)$  получается зеркальным отражением графика функции  $y=f(x)$  относительно оси  $y$  (рис. 64).

**Примеры построения графиков функций с помощью простейших преобразований. 1.  $y=2x^2-8x+5$ .**

Преобразуем квадратный трехчлен:

$$2x^2-8x+5=2\left(x^2-4x+\frac{5}{2}\right)=2(x-2)^2-3.$$

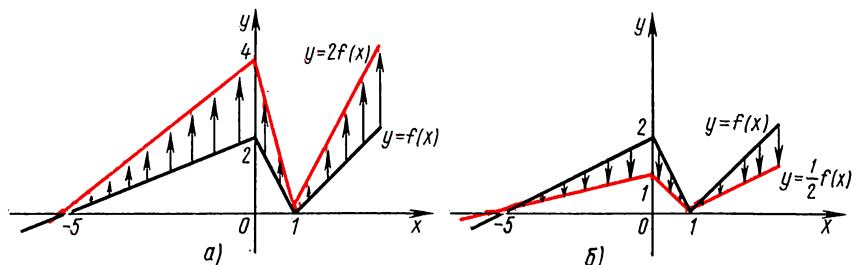


Рис. 62

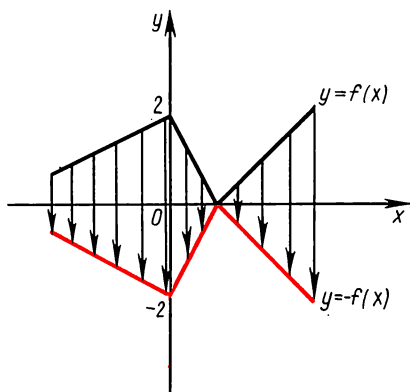


Рис. 63

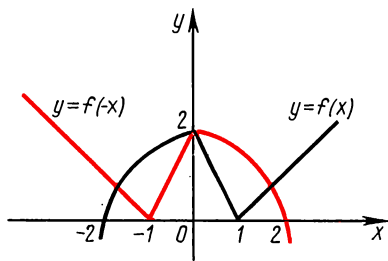


Рис. 64

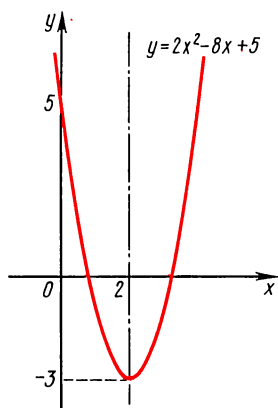


Рис. 65

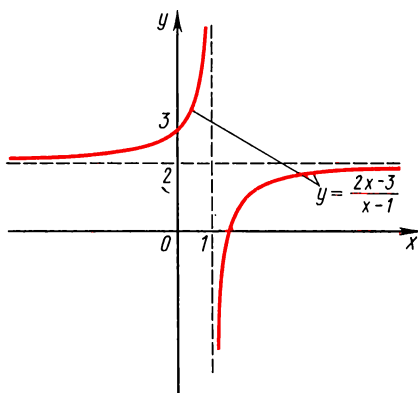


Рис. 66

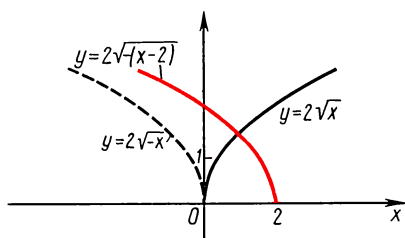


Рис. 67

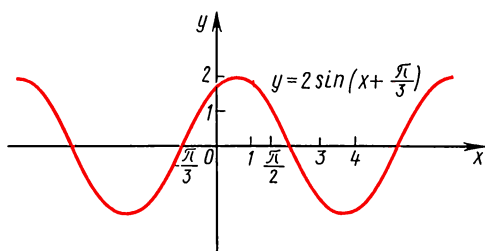


Рис. 68

Итак, нам нужно построить график функции  $y=2(x-2)^2-3$ . Это — график параболы  $y=2x^2$ , смещенный на 2 единицы вправо и на 3 единицы вниз (рис. 65).

**З а м е ч а н и е.** Подобным же образом можно строить график любого квадратного трехчлена.

$$2. y = \frac{2x-3}{x-1}.$$

Выполним преобразования:

$$\frac{2x-3}{x-1} = \frac{2(x-1)-1}{x-1} = 2 - \frac{1}{x-1}.$$

Таким образом, нам нужно построить график функции  $y = -\frac{1}{x-1} + 2$ . Это — график гиперболы  $y = -1/x$ , смещенный на единицу вправо и на 2 единицы вверх (рис. 66).

**З а м е ч а н и е.** Подобным же образом можно строить график любой дробно-линейной функции  $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ .

$$3. y = \sqrt{-4x+8}.$$

Запишем заданную функцию иначе:

$$y = \sqrt{-4x+8} = 2\sqrt{-(x-2)}.$$

Чтобы построить график этой функции, нужно сначала график функции  $y=2\sqrt{x}$  отобразить симметрично относительно оси  $y$ , а затем сдвинуть полученный график на 2 единицы вправо (рис. 67).

$$4. y = \sin x + \sqrt{3}\cos x.$$

Выполним преобразования:

$$\begin{aligned} \sin x + \sqrt{3}\cos x &= 2\left(\frac{1}{2}\sin x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x\right) = \\ &= 2\left(\sin x \cos \frac{\pi}{3} + \cos x \sin \frac{\pi}{3}\right) = 2\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right). \end{aligned}$$

Таким образом, нам нужно построить график функции  $y=2\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ . Это — график функции  $y=2\sin x$ , смещенный на  $\pi/3$  влево (рис. 68). Функция имеет период  $2\pi$ , поэтому достаточно построить ее график для  $-\pi \leq x \leq \pi$ .

**З а м е ч а н и е.** Подобным же образом можно строить график любой функции вида  $y = a\cos x + b\sin x$ , где  $a$  и  $b$  — постоянные.

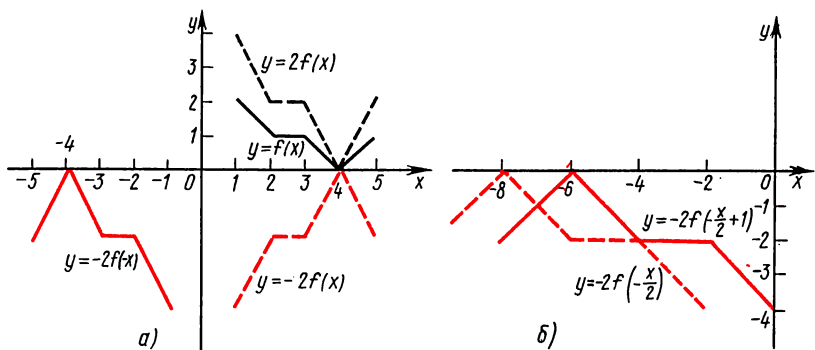


Рис. 69

5. Построить график функции  $y = -2f\left(1 - \frac{x}{2}\right)$ , если дан график функции  $y = f(x)$  (рис. 69, а).

Последовательно строим сначала графики функций  $y = 2f(x)$ ,  $y = -2f(x)$ ,  $y = -2f(-x)$  (рис. 69, а), а затем графики функций  $y = -2f\left(-\frac{x}{2}\right)$  и  $y = -2f\left(-\frac{1}{2}(x-2)\right) = -2f\left(-\frac{x}{2} + 1\right)$  (рис. 69, б).

## § 2. Основные операции над графиками функций

В этом пункте мы рассмотрим графики функций вида  $y = f(\varphi(x))$ , где  $\varphi(x)$  — любая из основных элементарных функций, а  $f$  — любая из следующих операций над ними: прибавление к функции какого-либо числа, умножение функции на число, деление единицы на функцию, возведение функции в положительную степень, извлечение корня из функции, нахождение показательной функции от функции, логарифмирование функции, нахождение модуля функции, нахождение тригонометрических функций от функции.

Все указанные операции можно проводить непосредственно над графиками основных элементарных функций (понимая под этим выполнение операций над соответствующими координатами), поскольку эти графики известны. Как правило, график функции  $y = f(\varphi(x))$  трудно, а порой и просто невозможно построить, используя общую схему исследования функции (см. разд. IV). В то же время эскиз такого графика легко нарисовать с помощью упрощенной схемы исследования, если использовать операции над графиками.

Схема построения графика сложной функции состоит в следующем:

- 1<sup>0</sup>. Находят область определения исследуемой сложной функции, а также граничные значения функции.
- 2<sup>0</sup> Строят график функции  $y_1 = \varphi(x)$ . Отмечают на этом графике характерные точки, т. е. нули и точки разрыва, находят граничные точки или соответствующие пределы и одну-две промежуточные точки; вообще говоря, при выборе характерных точек функции  $\varphi(x)$  приходится учитывать не только ее свойства, но и свойства  $f(\varphi)$ .
- 3<sup>0</sup> Производят заданные операции над ординатами выбранных точек, вычисляют соответствующие пределы.
- 4<sup>0</sup> Наносят полученные точки и предельные значения на рисунок, помещенный под графиком функции  $y_1 = \varphi(x)$  так, чтобы ось  $y_1$  была продолжением оси  $y$ . Затем соединяют полученные точки сплошной линией в тех промежутках, в которых функция непрерывна, и учитывают (если она имеется) симметрию графика относительно точки или прямой.

Заметим, что полученные точки следует соединять не сплошной, а гладкой линией, поскольку рассматриваемые в этом разделе элементарные функции недифференцируемы лишь в отдельных, как правило, хорошо известных точках. Так, например, функция  $y = |x|$  не имеет производной в точке  $x = 0$ , а функция  $y = \sqrt[3]{x^2 - 1}$  — в точках  $x = 1$  и  $x = -1$ , и, следовательно, в этих точках указанные функции недифференцируемы.

На практике, скажем, для вычисления площади фигуры, ограниченной некоторой замкнутой кривой, или объема тела вращения и т. п., вполне достаточно построить эскиз графика. Впрочем, при необходимости такой эскиз всегда можно уточнить с помощью методов, рассмотренных в следующем разделе.

Проиллюстрируем приведенную выше схему построения эскизов графиков сложных функций на примерах.

### § 3. Построение графиков функции вида $y = f(kx + b)$

График функции  $y = kx + b$  есть прямая (рис. 70), симметричная относительно точки  $M_0(-b/k; 0)$  ( $k \neq 0$ ). Действительно, пусть  $x_1 = -\frac{b}{k} + \alpha$ ,  $x_2 = -\frac{b}{k} - \alpha$ , где  $\alpha$  — любое положительное число. Тогда

$$y(x_1) = kx_1 + b = k\left(-\frac{b}{k} + \alpha\right) + b = \alpha k,$$

$$y(x_2) = kx_2 + b = k\left(-\frac{b}{k} - \alpha\right) + b = -\alpha k,$$

т. е.  $y(x_1) = -y(x_2)$ . Итак, точки  $M_1$  и  $M_2$  симметричны относительно точки  $M_0(-b/k; 0)$ .

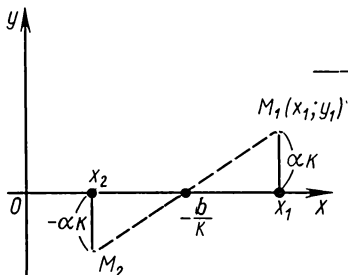


Рис. 70

Примеры. 1.  $y = \left(2 - \frac{1}{3}x\right)^3$

1<sup>0</sup> Область определения — вся действительная ось. Граничные значения:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(2 - \frac{1}{3}x\right)^3 = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2 - \frac{1}{3}x\right)^3 = -\infty.$$

2<sup>0</sup> Здесь  $y_1 = 2 - \frac{1}{3}x$ ,  $y = y_1^3$ . Строим график функции  $y_1 = 2 - \frac{1}{3}x$  (верхняя часть рис. 71).

Отмечаем на этом графике характерные точки — точки пересечения с осями координат  $M_1(6; 0)$ ,  $M_2(0; 2)$  и одну промежуточную точку  $M_3(3; 1)$ .

3<sup>0</sup> Возводим в куб ординаты этих точек:

$$M_1(6; 0): y_1 = 0, \text{ отсюда } y = y_1^3 = 0 \text{ и получаем точку } N_1(6; 0);$$

$$M_2(0; 2): y_1 = 2, \quad \gg \quad y = y_1^3 = 8 \quad \gg \quad \gg \quad \gg \quad N_2(0; 8);$$

$$M_3(3; 1): y_1 = 1, \quad \gg \quad y = y_1^3 = 1 \quad \gg \quad \gg \quad \gg \quad N_3(3; 1).$$

4<sup>0</sup> Наносим полученные точки на нижнюю часть рис. 71, соединяем их плавной линией и учитываем симметрию графика относительно точки  $N_1(6; 0)$ .

Действительно, функция  $y_1 = 2 - \frac{1}{3}x$  симметрична относительно точки  $N_1(6; 0)$ , поэтому функция  $y = \left(2 - \frac{1}{3}x\right)^3$  симметрична относительно точки  $N_1(6; 0)$ .

2.  $y = \sqrt{2 - 2x}$ .

1<sup>0</sup> Решаем неравенство  $2 - 2x \geq 0$ , откуда  $-\infty < x \leq 1$ . Этот полуинтервал является областью определения функции. Граничные значения:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{2 - 2x} = +\infty; \quad \text{при } x = 1 \text{ имеем } y = 0.$$

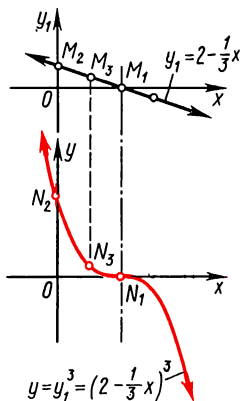


Рис. 71

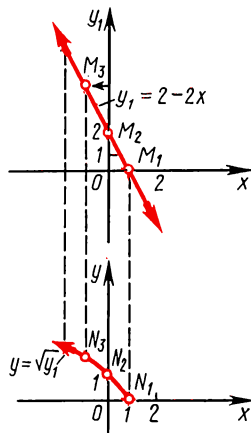


Рис. 72

2<sup>0</sup> Здесь  $y_1 = 2 - 2x$ ,  $y = \sqrt{y_1}$ . Отмечаем на графике функции  $y_1 = 2 - 2x$  (верхняя часть рис. 72) точки пересечения с осями координат  $M_1(1; 0)$ ,  $M_2(0; 2)$  и одну промежуточную точку  $M_3(-1; 4)$ .

3<sup>0</sup> Извлекаем квадратный корень из ординат этих точек: для точки  $M_1(1; 0)$  имеем  $y_1 = 0$ , откуда  $y = \sqrt{y_1} = 0$  и получаем точку  $N_1(1; 0)$ ; аналогично, для точек  $M_2(0; 2)$  и  $M_3(-1; 4)$  находим соответствующие точки  $N_2(0; \sqrt{2})$  и  $N_3(-1; 2)$ .

4<sup>0</sup> Наносим полученные точки на нижнюю часть рис. 72 и соединяем их плавной линией, учитывая, что  $y \rightarrow +\infty$  при  $x \rightarrow -\infty$ .

$$3. y = \sqrt[3]{\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}}.$$

1<sup>0</sup> Область определения — вся действительная ось. Граничные значения:  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt[3]{\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}} = -\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}} = +\infty$ .

2<sup>0</sup> Здесь  $y_1 = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$ ,  $y = \sqrt[3]{y_1}$ . Отмечаем на графике функции  $y_1 = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$  (верхняя часть рис. 73) характерные точки:  $M_1(1; 0)$ ,  $M_2(3; 1)$ ,  $M_3(5; 2)$ .

3<sup>0</sup> Извлекаем кубический корень из ординат этих точек. Для точки  $M_1(1; 0)$  имеем  $y_1 = 0$ , откуда  $y = \sqrt[3]{y_1} = 0$ , т. е. получаем точку  $N_1(1; 0)$ ; аналогично, для точек  $M_2(3; 1)$  и  $M_3(5; 2)$  находим соответствующие точки  $N_2(3; 1)$  и  $N_3(5; \sqrt[3]{2})$ .

4<sup>0</sup> Наносим полученные точки на нижнюю часть рис. 73, соединяем их плавной линией и учитываем симметрию графика относительно точки  $N_1(1; 0)$ .

$$4. y = 3^{-2x+1}$$

1<sup>0</sup> Область определения — вся действительная ось. Граничные значения:  $\lim_{x \rightarrow -\infty} 3^{-2x+1} = +\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} 3^{-2x+1} =$

$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{3^{2x}} = 0$ . Таким образом, ось  $x$  является горизонтальной асимптотой правой части графика.

2<sup>0</sup> Здесь  $y_1 = -2x + 1$ ,  $y = 2^{y_1}$ . Отмечаем на графике функции  $y_1 = -2x + 1$  (верхняя часть рис. 74) характерные точки:  $M_1(0; 1)$ ,  $M_2(1/2; 0)$ ,  $M_3(1; -1)$ .

3<sup>0</sup> Возводим основание 3 в степень с показателем, равным ординате каждой из этих точек. В результате получим соответствующие точки  $N_1(0; 3)$ ,  $N_2(1/2; 1)$ ,  $N_3(1; 1/3)$ .

4<sup>0</sup> Наносим полученные точки на нижнюю часть рис. 74, соединяем их плавной линией,

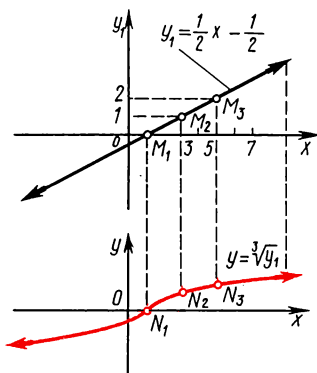


Рис. 73



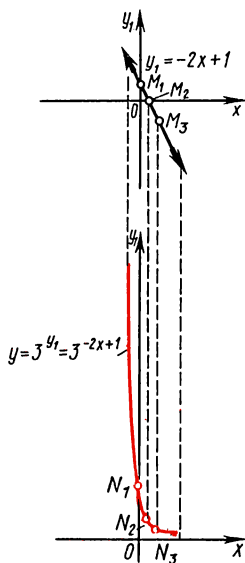


Рис. 74

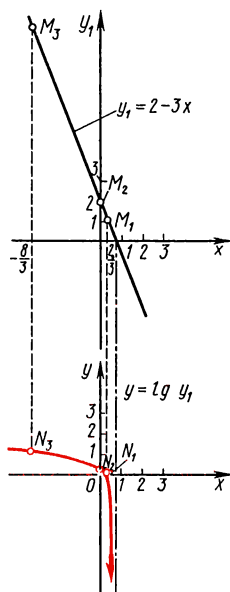


Рис. 75

учитывая, что  $y \rightarrow +\infty$  при  $x \rightarrow -\infty$  и что ось  $x$  является горизонтальной асимптотой правой части графика.

---

5.  $y = \lg(2 - 3x)$ .

---

1<sup>0</sup> Решаем неравенство  $2 - 3x > 0$ , откуда  $x < 2/3$ . Этот интервал — область определения функции. Граничные значения:  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \lg(2 - 3x) = +\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow \frac{2}{3} - 0} \lg(2 - 3x) = -\infty$ . Таким образом,  $x = 2/3$  — вертикальная асимптота.

2<sup>0</sup> Здесь  $y_1 = 2 - 3x$ ,  $y = \lg y_1$ . Отмечаем на графике функции  $y_1 = 2 - 3x$  (верхняя часть рис. 75) характерные точки:  $M_1(1/3; 1)$ ,  $M_2(0; 2)$ ,  $M_3(-8/3; 10)$ .

3<sup>0</sup> Найдём десятичные логарифмы ординат этих точек и получим соответствующие точки  $N_1(1/3; 0)$ ,  $N_2(0; \lg 2)$ ,  $N_3(-8/3; 1)$ .

4<sup>0</sup> Наносим полученные точки на нижнюю часть рис. 75 и соединяем их плавной линией, учитывая, что  $y \rightarrow +\infty$  при  $x \rightarrow -\infty$  и что прямая  $x = 2/3$  является вертикальной асимптотой.

---

6.  $y = \frac{1}{-2x + 1}$ .

---

1<sup>0</sup>. Область определения — вся числовая ось, кроме точки  $x = 1/2$ . Граничные значения:  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{-2x + 1} = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2} - 0} \frac{1}{-2x + 1} = +\infty$ ,

$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}+0} \frac{1}{-2x+1} = -\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{-2x+1} = 0$ . Таким образом, имеется горизонтальная асимптота  $y=0$  и вертикальная асимптота  $x=1/2$ .

2°. Здесь  $y_1 = -2x + 1$ ,  $y = 1/y_1$ . Отмечаем на графике функции  $y_1 = -2x + 1$  (верхняя часть рис. 76) характерные точки:  $M_1(0; 1)$ ,  $M_2(-1/4; 3/2)$ ,  $M_3(-1; 3)$ .

3°. Находим соответствующие им точки  $N_1(0; 1)$ ,  $N_2(-1/4; 2/3)$ ,  $N_3(1; 1/3)$ .

4°. Наносим полученные точки на нижнюю часть рис. 76 и соединяем их плавной линией; при этом учитываем, что  $y=0$  — горизонтальная асимптота,  $x=1/2$  — вертикальная асимптота и что график симметричен относительно точки  $x=1/2$ .

$$7. y = \left| \frac{4}{3} - 2x \right|.$$

Область определения — вся числовая ось.

Здесь  $y_1 = \frac{4}{3} - 2x$ ,  $y = |y_1|$ . Строим график функции  $y_1 = \frac{4}{3} - 2x$  (рис. 77).

Рассмотрим какую-нибудь точку графика функции  $y_1 = \frac{4}{3} - 2x$  с положительной ординатой. Так как модуль положительной ординаты точки этого графика есть она сама, то эта ордината, а также все ординаты левой

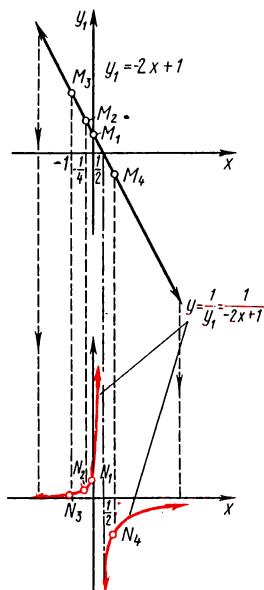


Рис. 76

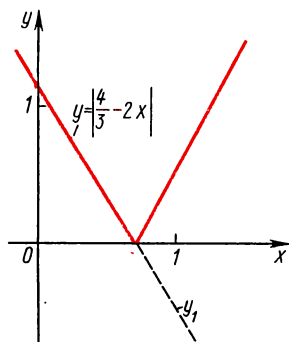


Рис. 77

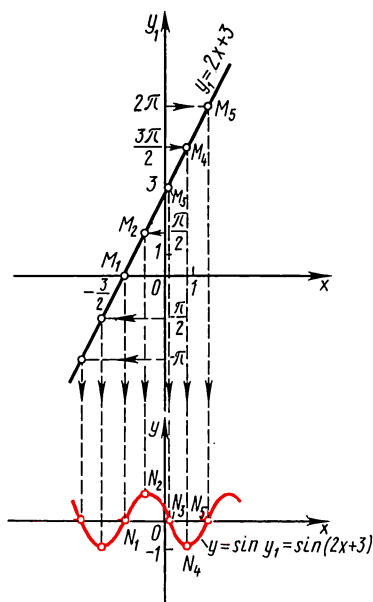


Рис. 78

части графика функции  $y_1 = \frac{4}{3} - 2x$  совпадают с соответствующими ординатами графика функции  $y = \left| \frac{4}{3} - 2x \right|$ .

Рассмотрим теперь какую-нибудь точку графика функции  $y_1 = \frac{4}{3} - 2x$  с отрицательной ординатой. Поскольку модуль отрицательной ординаты точки этого графика есть число положительное, равное значению отрицательной ординаты, взятому со знаком минус, эта ордината должна откладываться на графике ввѣрх (в положительном направлении оси  $y$ ). Таким образом, правую часть искомого графика, для которой  $y_1 < 0$ , получаем отражением относительно оси  $x$  (рис. 77).

---


$$8. y = \sin(2x+3).$$


---

1<sup>0</sup> Область определения — вся числовая ось.

2<sup>0</sup> Здесь  $y_1 = 2x+3$ ,  $y = \sin y_1$ .

Отметим, что функция  $y = \sin y_1$  периодична с периодом  $2\pi$ . Поэтому рассмотрим отрезок  $0 \leq y_1 \leq 2\pi$ . На этом отрезке выбираем характерные точки:  $y_1 = 0$ ,  $y_2 = \pi/2$ ,  $y_3 = \pi$ ,  $y_4 = 3\pi/2$ ,  $y_5 = 2\pi$ .

На графике функции  $y_1 = 2x+3$  (верхняя часть рис. 78) находим точки с соответствующими ординатами. Таким образом, получаем следующие характерные точки этого графика:  $M_1(-3/2; 0)$ ,  $M_2\left(\frac{-3+\pi/2}{2}; \pi/2\right)$ ,  $M_3\left(\frac{-3+\pi}{2}; \pi\right)$ ,  $M_4\left(\frac{-3+3\pi/2}{2}; 3\pi/2\right)$ ,  $M_5\left(\frac{-3+2\pi}{2}; 2\pi\right)$ .

3<sup>0</sup> Найдем теперь соответствующие точки графика функции  $y = \sin y_1$ : для точки  $M_1$  имеем  $y_1 = 0$ , отсюда  $y = \sin y_1 = 0$  и получаем точку  $N_1(-3/2; 0)$ ;

$$M_2 \quad y_1 = \pi/2, \quad y = \sin y_1 = 1 \quad N_2\left(\frac{-3+\pi/2}{2}; 1\right);$$

$$M_3 \quad y_1 = \pi, \quad y = \sin y_1 = 0 \quad N_3\left(\frac{-3+\pi}{2}; 0\right);$$

$$M_4 \quad y_1 = 3\pi/2, \quad y = \sin y_1 = -1 \quad N_4\left(\frac{-3+3\pi/2}{2}; -1\right);$$

$$M_5 \quad y_1 = 2\pi, \quad y = \sin y_1 = 0 \quad N_5\left(\frac{-3+2\pi}{2}; 0\right).$$

4<sup>0</sup> Наносим полученные точки на нижнюю часть рис. 78 и соединяем их плавной линией. Оставшуюся часть графика можно достроить, пользуясь периодичностью функции  $y = \sin(2x+3)$  с периодом  $\pi$ .

## § 4. Построение графиков функций вида $y=f(ax^2+bx+c)$

Как известно, графиком функции  $y_1=ax^2+bx+c$  служит парабола, симметричная относительно прямой  $x=-b/(2a)$ .

**Примеры. 1.**  $y=(x^2-4x+3)^2$ .

1<sup>0</sup>. Область определения — вся числовая ось. Граничные значения:  
 $\lim_{x \rightarrow \infty} (x^2-4x+3)^2 = +\infty$ .

2<sup>0</sup>. Здесь  $y_1=x^2-4x+3$ ,  $y=y_1^2$ . Строим график функции  $y_1=x^2-4x+3$  (верхняя часть рис. 79). Отмечаем на этом графике характерные точки — вершину параболы, точки пересечения параболы с осями координат и одну промежуточную точку:  $M_0(2; -1)$ ,  $M_1(3; 0)$ ,  $M_2(4; 3)$ ,  $M_3(1; 0)$ ,  $M_4(0; 3)$ . В силу симметрии графика относительно прямой  $x=2$  для построения эскиза достаточно трех точек:  $M_0$ ,  $M_1$ ,  $M_2$ .

3<sup>0</sup> Возводим в квадрат ординаты этих точек. Тогда получим соответствующие точки  $N_0(2; 1)$ ,  $N_1(3; 0)$ ,  $N_2(4; 9)$ .

4<sup>0</sup> Наносим полученные точки на нижнюю часть рис. 79, соединяем их плавной линией и учитываем граничные значения и симметрию относительно прямой  $x=2$ .

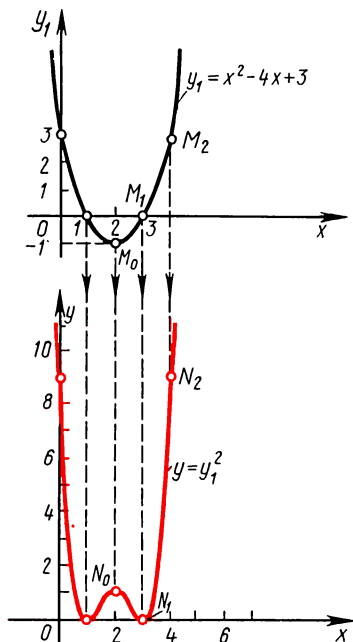


Рис. 79

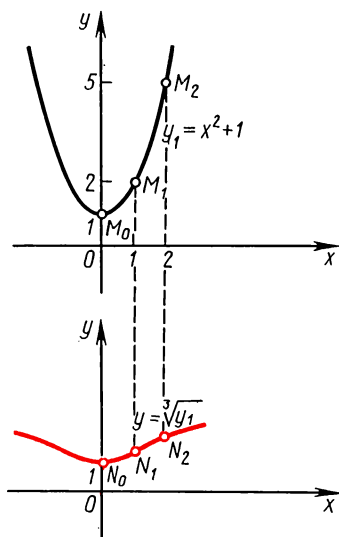


Рис. 80

---


$$2. y = \sqrt[3]{x^2 + 1}.$$


---

1<sup>0</sup>. Область определения — вся числовая ось. Граничные значения:  
 $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[3]{x^2 + 1} = \infty$ .

Функция четная, т. е. ее график симметричен относительно оси ординат.

2<sup>0</sup> Здесь  $y_1 = x^2 + 1$ ,  $y = \sqrt[3]{y_1}$ . На графике функции  $y_1 = x^2 + 1$  (верхняя часть рис. 80) отмечаем выбранные точки:  $M_0(0; 1)$ ,  $M_1(1; 2)$ ,  $M_2(2; 5)$ .

3<sup>0</sup> Извлекаем кубический корень из ординат этих точек. В результате получим соответственно точки  $N_0(0; 1)$ ,  $N_1(1; \sqrt[3]{2})$ ,  $N_2(2; \sqrt[3]{5})$ .

4<sup>0</sup>. Наносим полученные точки на нижнюю часть рис. 80 и соединяем их плавной линией. График можно дополнить точкой  $N_3(0,1; 1,01)$ .

---

$$3. y = 2^{x^2 - 2x - 3}$$


---

1<sup>0</sup>. Область определения — вся числовая ось. Граничные значения:  
 $\lim_{x \rightarrow \infty} 2^{x^2 - 2x - 3} = +\infty$ .

2<sup>0</sup> Здесь  $y_1 = x^2 - 2x - 3$ ,  $y = 2^{y_1}$ . Отмечаем на графике функции  $y_1 = x^2 - 2x - 3$  (верхняя часть рис. 81) выбранные точки:  $M_0(1; -4)$ ,  $M_1(2; -3)$ ,  $M_2(3; 0)$ .

3<sup>0</sup> Возводим основание 2 в степень с показателем, равным ординате

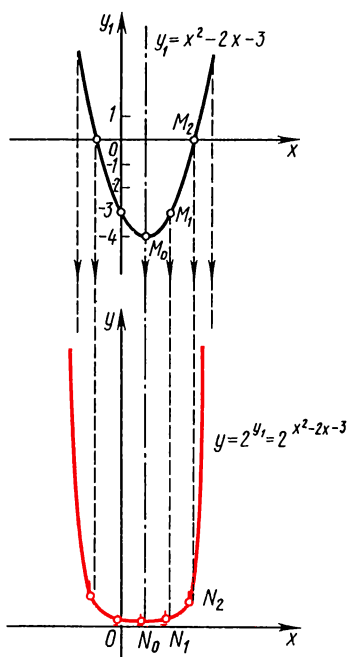


Рис. 81

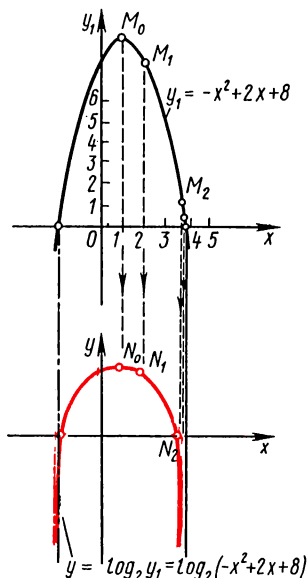


Рис. 82

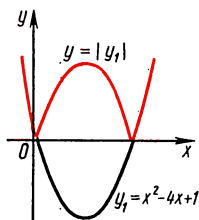


Рис. 83

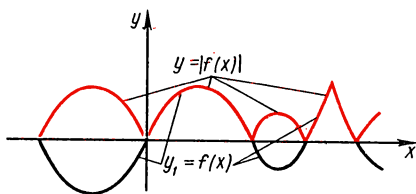


Рис. 84

указанной точки. При этом точке  $M_0(1; -4)$  будет соответствовать точка  $N_0(1; 1/16)$ , точке  $M_1(2; -3)$  — точка  $N_1(2; 1/8)$ , точке  $M_2(3; 0)$  — точка  $N_2(3; 1)$ .

4°. Наносим точки  $N_0, N_1, N_2$  на нижнюю часть рис. 81 и соединяем их плавной кривой. Ввиду симметрии графика функции  $y_1 = x^2 - 2x - 3$  относительно прямой  $x = 1$  искомый график также будет симметричен относительно этой прямой.

4.  $y = \log_2(-x^2 + 2x + 8)$ .

1°. Находим область определения; имеем  $-x^2 + 2x + 8 > 0$ , откуда  $-2 < x < 4$ . Граничные значения:  $\lim_{x \rightarrow -2+0} \log_2(-x^2 + 2x + 8) = -\infty$ ,

$\lim_{x \rightarrow 4-0} \log_2(-x^2 + 2x + 8) = -\infty$ . Имеются две вертикальные асимптоты:  $x = -2$ ;  $x = 4$ .

2°. Здесь  $y_1 = -x^2 + 2x + 8$ ,  $y = \log_2 y_1$ . На графике функции  $y_1 = -x^2 + 2x + 8$  (верхняя часть рис. 82) выбираем точки  $M_0(1; 9)$ ,  $M_1(2; 8)$ ,  $M_2(1 + 2\sqrt{2}; 1)$ .

3°. Этим точкам соответствуют точки  $N_0(1; \log_2 9)$ ,  $N_1(2; 3)$ ,  $N_2(1 + 2\sqrt{2}; 0)$  графика искомой функции.

4°. Так как парабола  $y_1 = -x^2 + 2x + 8$  симметрична относительно прямой  $x = 1$ , то и искомый график симметричен относительно этой прямой (нижняя часть рис. 82).

5.  $y = |x^2 - 4x + 1|$ .

Здесь  $y_1 = x^2 - 4x + 1$ ,  $y = |y_1|$ . Строим график функции  $y_1 = x^2 - 4x + 1$ , а затем ту часть параболы, которая расположена ниже оси  $x$ , зеркально отражаем относительно оси абсцисс (рис. 83).

З а м е ч а н и е. Аналогично строится график любой функции вида  $y = |f(x)|$ . Схема построения такого графика такова: сначала строят график функции  $y_1 = f(x)$ , а затем все части графика, лежащие ниже оси абсцисс, зеркально отражают относительно этой оси (рис. 84).

На рис. 85 показано построение графика функции  $y = |\lg x|$ .

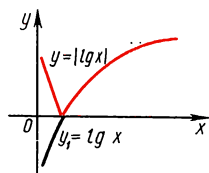


Рис. 85

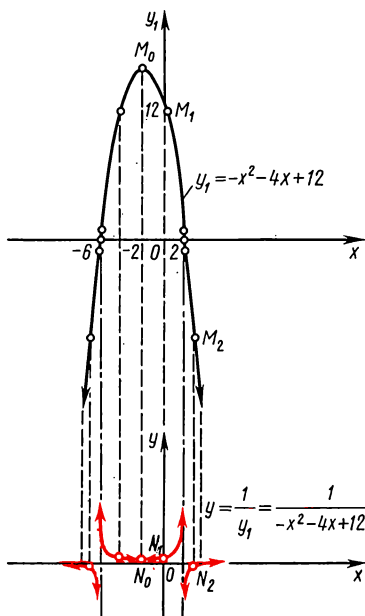


Рис. 86

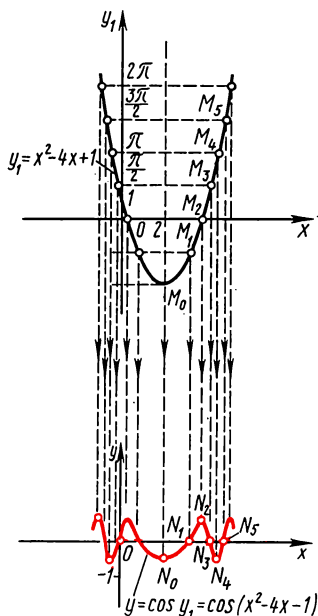


Рис. 87

---

6.  $y = \frac{1}{-x^2 - 4x + 12}$ .

---

1<sup>0</sup> Область определения — вся числовая ось, за исключением точек  $x=2$ ,  $x=-6$ .

Граничные значения:  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{-x^2 - 4x + 12} = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{-x^2 - 4x + 12} = 0$ ,

$\lim_{x \rightarrow -6-0} \frac{1}{(x+6)(2-x)} = -\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow -6+0} \frac{1}{(x+6)(2-x)} = +\infty$ ,

$\lim_{x \rightarrow 2-0} \frac{1}{(x+6)(2-x)} = +\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow 2+0} \frac{1}{(x+6)(2-x)} = -\infty$ . Итак, имеются вертикальные асимптоты  $x=2$  и  $x=-6$  и горизонтальная асимптота  $y=0$ .

2<sup>0</sup> Здесь  $y_1 = -x^2 - 4x + 12$ ,  $y = 1/y_1$ . Выберем на графике функции  $y_1 = -x^2 - 4x + 12$  (верхняя часть рис. 86) точки  $M_0(-2; 16)$ ,  $M_1(0; 12)$ ,  $M_2(3; -9)$ .

3<sup>0</sup> Им соответствуют точки  $N_0(-2; 1/16)$ ,  $N_1(0; 1/12)$ ,  $N_2(3; -1/9)$  искомого графика.

4<sup>0</sup> График симметричен относительно прямой  $x=-2$  (нижняя часть рис. 86).

---

7.  $y = \cos(x^2 - 4x + 1)$ .

---

1<sup>0</sup> Область определения — вся числовая ось.

Не имеет смысла говорить о граничных значениях, так как пределы функции при  $x \rightarrow \pm\infty$  не существуют.

2<sup>0</sup> Здесь  $y_1 = x^2 - 4x + 1$ ,  $y = \cos y_1$ . Отмечаем на оси  $y_1$  точки  $\pm\pi/2$ ,  $\pm\pi$ ,  $\pm 3\pi/2$ ,  $\pm 2\pi$ ,... и на графике функции  $y_1 = x^2 - 4x + 1$  (верхняя часть рис. 87) находим точки с соответствующими ординатами:  $M_0(2; -3)$ ,  $M_1(2 + \sqrt{3 - \frac{\pi}{2}}; -\frac{\pi}{2})$ ,  $M_2(2 + \sqrt{3}; 0)$ ,  $M_3(2 + \sqrt{3 + \frac{\pi}{2}}; \pi/2)$ ,  $M_4(2 + \sqrt{3 + \pi}; \pi)$ ,  $M_5(2 + \sqrt{3 + \frac{3\pi}{2}}; \frac{3\pi}{2})$ .

3<sup>0</sup> Полученным точкам соответствуют следующие точки искомого графика  $y = \cos y_1$ :  $N_0(2; -0,9)$ ,  $N_1(2 + \sqrt{3 - \frac{\pi}{2}}; 0)$ ,  $N_2(2 + \sqrt{3}; 1)$ ,

$N_3(2 + \sqrt{3 + \frac{\pi}{2}}; 0)$ ,  $N_4(2 + \sqrt{3 + \pi}; -1)$ ,  $N_5(2 + \sqrt{3 + \frac{3\pi}{2}}; 0)$ .

4<sup>0</sup> Точки  $N_0$ ,  $N_1$ ,  $N_2$ ,  $N_3$ ,  $N_4$ ,  $N_5$  наносим на нижнюю часть рис. 87, соединяем плавной кривой и учитываем симметрию графика относительно прямой  $x = 2$ .

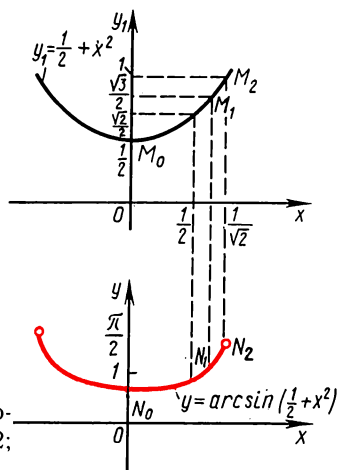


Рис. 88

---

8.  $y = \arcsin\left(\frac{1}{2} + x^2\right)$ .

---

1<sup>0</sup> Область определения находим из неравенства  $\frac{1}{2} + x^2 \leq 1$ , откуда  $-1/\sqrt{2} \leq x \leq 1/\sqrt{2}$ . Граничные значения: при  $x = \pm 1/\sqrt{2}$  имеем  $y = \pi/2$ . Функция четная, т. е. ее график симметричен относительно оси  $y$ .

2<sup>0</sup> Здесь  $y_1 = \frac{1}{2} + x^2$ ,  $y = \arcsin y_1$ . Выберем точки на графике функции  $y_1 = \frac{1}{2} + x^2$  (верхняя часть рис. 88).

Удобно выбрать промежуточную точку так, чтобы  $y = \frac{\pi}{3}$ , откуда  $y_1 = \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ , и  $x$  найдется из уравнения  $y_1 = \frac{1}{2} + x^2$ , т. е.  $x_1 = \sqrt{\frac{\sqrt{3}-1}{2}}$ ; получаем точку  $M_1\left(\sqrt{\frac{\sqrt{3}-1}{2}}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ . Аналогично, если  $y = \frac{\pi}{6}$ , то  $y_1 = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$  и  $x_1 = 0$ ; получаем точку  $M_0\left(0; \frac{1}{2}\right)$ .

3<sup>0</sup> Точкам  $M_0$  и  $M_1$  соответствуют точки  $N_0\left(0; \frac{\pi}{6}\right)$ ,  $N_1\left(\sqrt{\frac{\sqrt{3}-1}{2}}; \frac{\pi}{3}\right)$  искомого графика.

4<sup>0</sup> Наносим точки  $N_0$  и  $N_1$ , а также граничные точки на нижнюю часть рис. 88 и строим эскиз графика, учитывая его симметрию относительно оси  $y$ .



## § 5. Построение графиков функций вида $y = f\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)$

Как известно, графиком дробно-линейной функции  $y = \frac{ax+b}{cx+d}$  ( $c \neq 0$ ) служит гипербола, ветви которой симметричны относительно точки  $x_0 = -\frac{d}{c}$ ,  $y_0 = \frac{a}{c}$ .

Нетрудно проверить, что для любого действительного  $\alpha$  и  $x_1 = -\frac{d}{c} + \alpha$ ,  $x_2 = -\frac{d}{c} - \alpha$  выполняется равенство  $y_1 - \frac{a}{c} = -\left(y_2 - \frac{a}{c}\right)$ , где  $y_1 = \frac{ax_1+b}{cx_1+d}$ ,  $y_2 = \frac{ax_2+b}{cx_2+d}$ . Заметим, что прямая  $x = -\frac{d}{c}$  является вертикальной асимптотой, а прямая  $y = \frac{a}{c}$  — горизонтальной асимптотой графика дробно-линейной функции.

---

**Примеры. 1.**  $y = \sqrt{\frac{5-x}{x-1}}$ .

---

1°. Область определения находим из неравенства  $\frac{5-x}{x-1} \geq 0$ , откуда

$1 < x \leq 5$ . Граничные значения:  $\lim_{x \rightarrow 1+0} \sqrt{\frac{5-x}{x-1}} = +\infty$ ; при  $x=5$  имеем  $y=0$ . Существует вертикальная асимптота  $x=1$ .

2° Здесь  $y_1 = \frac{5-x}{x-1}$ ,  $y = \sqrt{y_1}$ ; если  $x \rightarrow \infty$ , то  $y_1 \rightarrow -1$ ; если  $x \rightarrow 1-0$ , то  $y_1 \rightarrow -\infty$ ; если  $x \rightarrow 1+0$ , то  $y_1 \rightarrow +\infty$ . На графике функции  $y_1 = \frac{5-x}{x-1}$  (верхняя часть рис. 89) выберем точки  $M_1(2; 3)$  и  $M_2(3; 1)$ .

3° Найдем соответствующие точки  $N_1(2; \sqrt{3})$  и  $N_2(3; 1)$  искомого графика  $y = \sqrt{y_1}$ .

4°. График функции  $y = \sqrt{\frac{5-x}{x-1}}$  изображен в нижней части рис. 89.

---

**2.**  $y = 3^{\frac{x+3}{2x-2}}$

---

1°. Область определения — вся числовая ось, кроме  $x=1$ . Граничные значения:  $\lim_{x \rightarrow -\infty} 3^{\frac{x+3}{2x-2}} = \sqrt{3}$ ,  $\lim_{x \rightarrow 1-0} 3^{\frac{x+3}{2x-2}} = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow 1+0} 3^{\frac{x+3}{2x-2}} = +\infty$ ,

$\lim_{x \rightarrow \infty} 3^{\frac{x+3}{2x-2}} = \sqrt{3}$ . Отсюда следует, что прямая  $x=1$  является вертикальной асимптотой графика функции, а прямая  $y = \sqrt{3}$  — горизонтальной асимптотой.

2° Здесь  $y_1 = \frac{x+3}{2x-2}$ ,  $y = 3^{y_1}$ . Строим график дробно-линейной функции: если  $x \rightarrow \infty$ , то  $y_1 \rightarrow 1/2$ ; если  $x \rightarrow 1-0$ , то  $y_1 \rightarrow -\infty$ ; если  $x \rightarrow 1+0$ , то

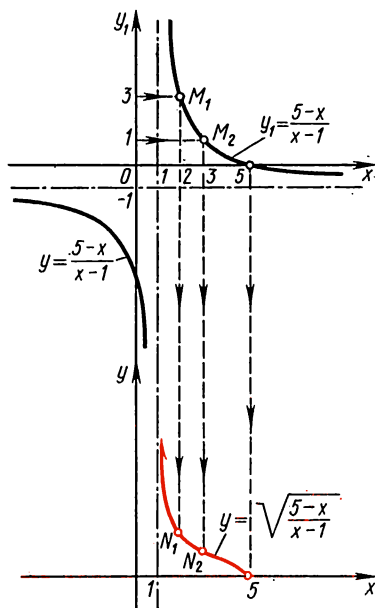


Рис. 89

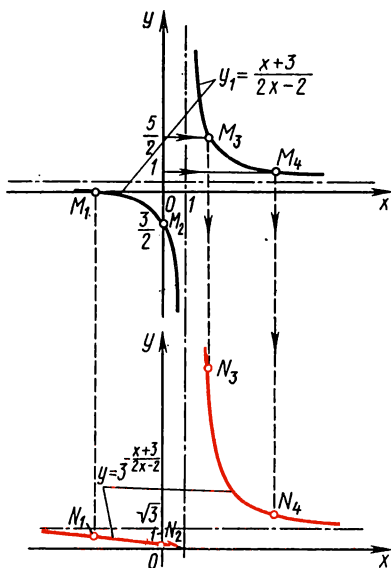


Рис. 90

$y_1 \rightarrow +\infty$ . На графике функции  $y_1 = \frac{x+3}{2x-2}$  (верхняя часть рис. 90) выберем точки  $M_1(-3; 0)$ ,  $M_2(0; -3/2)$ ,  $M_3(2; 5/2)$ ,  $M_4(5; 1)$ .

3°. Найдем соответствующие точки искомого графика:  $N_1(-3; 1)$ ,  $N_2(0; \frac{1}{3\sqrt{3}})$ ,  $N_3(2; 9\sqrt{3})$ ,  $N_4(5; 3)$ .

4°. График функции  $y = 3^{\frac{x+3}{2x-2}}$  изображен в нижней части рис. 90.

$$3. y = \log_{1/2} \left( \frac{-2x+2}{x+1} \right) = -\log_2 \left( \frac{-2x+2}{x+1} \right).$$

1° Находим область определения функции. Решая неравенство  $\frac{-2x+2}{x+1} > 0$ , имеем  $-1 < x < 1$ . Граничные значения:

$$\lim_{x \rightarrow -1+0} \left[ -\log_2 \left( \frac{-2x+2}{x+1} \right) \right] = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1-0} \left[ -\log_2 \left( \frac{-2x+2}{x+1} \right) \right] = +\infty.$$

Таким образом, прямые  $x=1$  и  $x=-1$  являются вертикальными асимптотами.

2° Здесь  $y_1 = \frac{-2x+2}{x+1}$ ,  $y = -\log_2 y_1$ . Строим график дробно-линейной функции: если  $x \rightarrow \infty$ , то  $y_1 \rightarrow \infty$ ; если  $x \rightarrow -1-0$ , то  $y_1 \rightarrow \infty$ ; если  $x \rightarrow -1+0$ , то  $y_1 \rightarrow +\infty$ . На графике функции  $y_1 = \frac{-2x+2}{x+1}$  (верхняя часть рис. 91) выберем точки  $M_1(3/5; 1/2)$ ,  $M_2(1/3; 1)$ ,  $M_3(0; 2)$ ,  $M_4(-1/3; 4)$ .

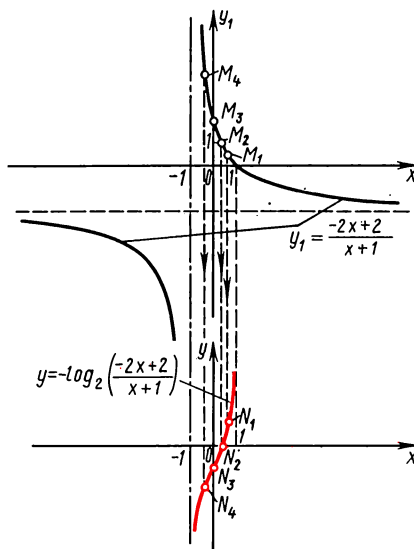


Рис. 91

3<sup>0</sup> Найдем соответствующие точки искомого графика  $N_1(3/5; 1)$ ,  $N_2(1/3; 0)$ ,  $N_3(0; -1)$ ,  $N_4(-1/3; -2)$ .

4<sup>0</sup> График функции  $y = -\log_2 y_1$  изображен в нижней части рис. 91.

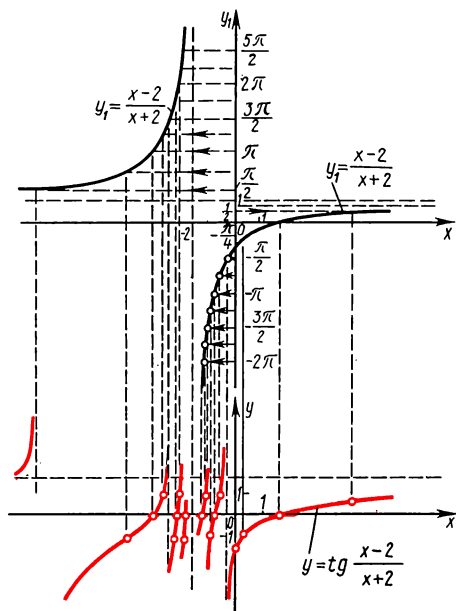


Рис. 92

$$4. y = \operatorname{tg} \frac{x-2}{x+2}.$$

Здесь  $y_1 = \frac{x-2}{x+2}$ ,  $y = \operatorname{tg} y_1$ .

Строим график дробно-линейной функции  $y_1 = \frac{x-2}{x+2}$ .

Отметим, что если  $x \rightarrow \infty$ , то  $y_1 \rightarrow 1$ ; если  $x \rightarrow -2-0$ , то  $y \rightarrow +\infty$ ; если  $x \rightarrow -2+0$ , то  $y_1 \rightarrow -\infty$ .

Те значения  $x$ , для которых значения  $y_1 = \frac{x-2}{x+2}$  равны  $\pm\pi/2$ ,  $\pm3\pi/2$ ,  $\pm5\pi/2$ , являются точками разрыва данной функции, а соответствующие прямые, как легко показать, служат вертикальными асимптотами. При  $x \rightarrow \pm\infty$  имеем  $y \rightarrow \operatorname{tg} 1 \approx 1,7$ .

Для упрощения построения эскиза графика  $y = \operatorname{tg} \frac{x-2}{x+2}$  абс.

циссы характерных точек можно не вычислять. Достаточно отметить на оси  $y_1$  точки  $0, \pm\pi/4, \pm 3\pi/4, \pm\pi$ , спроецировать их на линию  $y_1 = \frac{x-2}{x+2}$  (верхняя часть рис. 92) и полученные таким способом точки графика функции  $y_1 = \frac{x-2}{x+2}$  спроецировать в свою очередь на ось  $x$  нижней части рис. 92. Вычисляя значения тангенса от ординат характерных точек графика функции  $y_1$ , получим ординаты точек искомого графика.

## § 6. Эскизирование графиков функций

Под *эскизированием* графика функции мы будем понимать построение эскиза (наброска) графика функции без проведения полного исследования функции по общей схеме (см. разд. IV). Вместе с тем такой эскиз должен достаточно точно отражать основные элементы поведения функции; а именно поведение функции в окрестностях граничных точек и точек разрыва, в нулях и на бесконечности.

Для дальнейшего нам потребуются понятие эквивалентности.

**О п р е д е л е н и е.** Бесконечно малые (или бесконечно большие) при  $x \rightarrow a$  функции  $\alpha(x)$  и  $\beta(x)$  называются *эквивалентными* при  $x \rightarrow a$ , если

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1 \quad (a \text{ может быть конечным или бесконечным}).$$

Для обозначения эквивалентности бесконечно малых  $\alpha(x)$  и  $\beta(x)$  используют обозначение  $\alpha(x) \sim \beta(x)$ .

Геометрически тот факт, что  $\alpha(x) \sim \beta(x)$  при  $x \rightarrow a$ , означает, что в некоторой, вообще говоря, достаточно малой окрестности точки  $x=a$  график функции  $\alpha(x)$  можно заменить графиком эквивалентной ей функции  $\beta(x)$  с тем большей точностью, чем меньше выбранная окрестность (рис. 93).

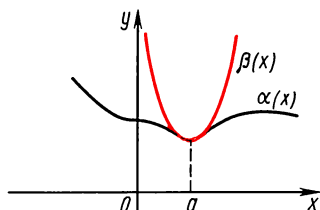


Рис. 93

### Примеры эквивалентных функций.

1. Если  $x \rightarrow 0$ , то  $\sin x \sim x$ , так как  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ .
2. Если  $x \rightarrow 0$ , то  $\operatorname{tg} x \sim x$ , поскольку  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$ .
3. Если  $x \rightarrow \infty$ , то  $x(x-3)(x+1) \sim x^3$ , поскольку  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(x-3)(x+1)}{x^3} = 1$ .
4. Если  $x \rightarrow +\infty$ , то  $x^3 \sqrt[3]{(x-2)^2} \sim x^{11/3}$ , так как  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 \sqrt[3]{(x-2)^2}}{x^{11/3}} = 1$ .
5. Если  $x \rightarrow 1$ , то  $\frac{x}{(x-1)(x-2)} \sim -\frac{1}{x-1}$ , так как  $\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{x}{(x-1)(x-2)} : \frac{(-1)}{x-1} \right) = 1$ .
6. Если  $x \rightarrow 1$ , то  $x^3 \sqrt[3]{(x-1)^2} \sim \sqrt[3]{(x-1)^2}$ , поскольку  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 \sqrt[3]{(x-1)^2}}{\sqrt[3]{(x-1)^2}} = 1$ .

7. Если  $x \rightarrow 2$ , то  $\frac{x}{(x-1)(x-2)} \sim \frac{2}{x-2}$ , так как  $\lim_{x \rightarrow 2} \left( \frac{x}{(x-1)(x-2)} : \frac{2}{x-2} \right) = 1$ .

Идея эскизирования графиков состоит в том, чтобы соединять сплошной линией (естественно, в тех промежутках, в которых функция непрерывна) отдельные части (куски) графика, а не отдельные его точки. Эти части графика являются ни чем иным, как геометрической асимптотикой функции в ее нулях, точках разрыва и на бесконечности.

При построении эскиза графика функции сначала, используя эквивалентности бесконечно малых и бесконечно больших, строят отдельные характерные части графика, которые хорошо аппроксимируются графиками известных (эталонных) функций, а затем соединяют эти части сплошной линией (естественно, в тех промежутках, где функция непрерывна).

В качестве характерных точек выбирают нули функции и точки разрыва. Кроме того, исследуют поведение функции на бесконечности, если, конечно, функция определена в окрестности бесконечности.

### Примеры построения эскизов графиков функций в окрестностях нулей.

1.  $y = x(x-3)(x+1)$ .

Нулями функции являются точки  $x=0$ ,  $x=-3$ ,  $x=-1$ . Исследуем поведение функции в нулях: если  $x \approx 0$ , то  $y \approx x(0-3)(0+1) = -3x$ ; если  $x \approx 3$ , то  $y \approx 3(x-3)(3+1) = 12(x-3)$ ; если  $x \approx -1$ , то  $y \approx (-1)(-1-3)(x+1) = 4(x+1)$ .

Вблизи нулей функции построим соответствующие графики (рис. 94).

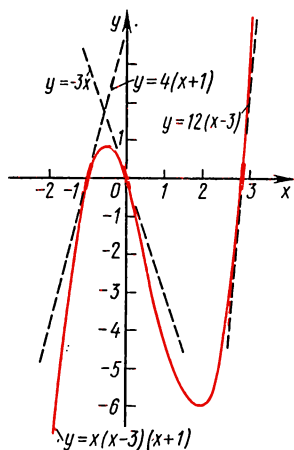


Рис. 94

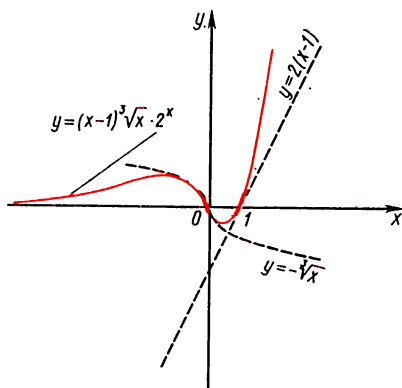


Рис. 95

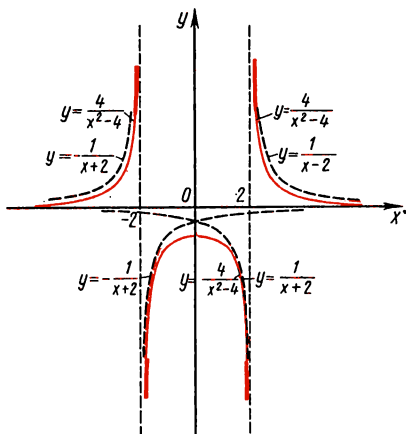


Рис. 96

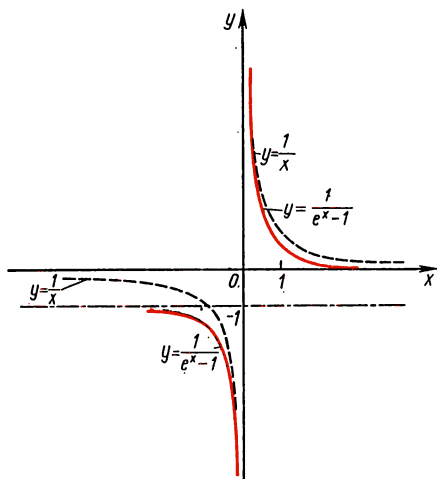


Рис. 97

---

2.  $y = (x-1)\sqrt[3]{x} \cdot 2^x$

---

Нулями функции являются точки  $x=0$ ,  $x=1$ . Исследуем поведение функции в нулях: если  $x \approx 0$ , то  $y \approx (0-1)\sqrt[3]{x} \cdot 2^0 = -\sqrt[3]{x}$ ; если  $x \approx 1$ , то  $y \approx \sqrt[3]{1} \cdot 2(x-1) = 2(x-1)$ .

Вблизи нулей функции построим соответствующие графики (рис. 95).

---

**Примеры построения эскизов графиков функций в окрестностях точек разрыва.** 1.  $y = \frac{4}{x^2 - 4}$ .

---

Точками разрыва (II рода) функции являются  $x=0$  и  $x=-2$ . Исследуем поведение функции в этих точках: если  $x \approx -2$ , то  $y = \frac{4}{(x-2)(x+2)} \approx \frac{4}{(-2-2)(x+2)} = -\frac{1}{x+2}$ ; если  $x \approx 2$ , то  $y = \frac{4}{(x-2)(2+2)} \approx \frac{1}{x-2}$ .

Вблизи точек разрыва построим соответствующие графики (рис. 96).

---

2.  $y = \frac{1}{e^x - 1}$ .

---

Точкой разрыва (II рода) является точка  $x=0$ . Исследуем поведение функции в ней:  $y \sim 1/x$ , поскольку  $e^x - 1 \sim x$  при  $x \rightarrow 0$ . Вблизи точки разрыва построим соответствующий график (рис. 97).

---

**Примеры построения эскизов графиков функций в окрестности бесконечности.** 1.  $y = x(x-3)(x+1)$ .

---

Если  $x \rightarrow +\infty$ , то  $y = x^3 \left(1 - \frac{3}{x}\right) \left(1 + \frac{1}{x}\right) \sim x^3$ , так как  $3/x$  и  $1/x \rightarrow 0$ .

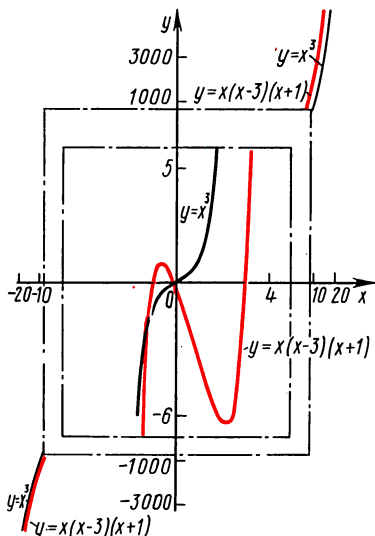


Рис. 98

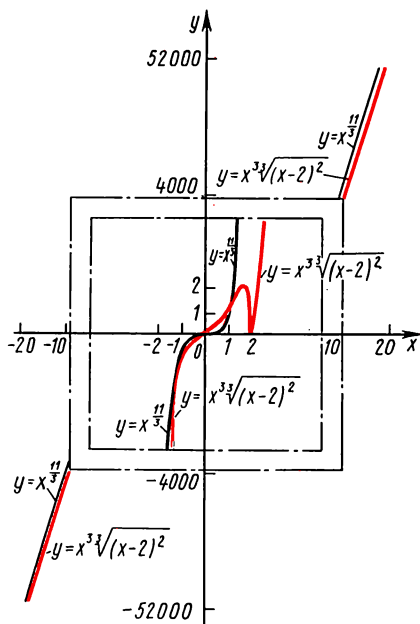


Рис. 99

величины малые при больших  $x$ . Аналогично, если  $x \rightarrow -\infty$ , то  $y \sim x^3$ .  
Построим соответствующие графики на бесконечности (рис. 98).

---

2.  $y = x^3 \sqrt[3]{(x-2)^2}$ .

---

Если  $x \rightarrow +\infty$ , то  $y = x^{11/3} \sqrt[3]{\left(1 - \frac{2}{x}\right)^2} \sim x^{11/3}$ , так как  $2/x \rightarrow 0$  при  $x \rightarrow \infty$ . Аналогично, если  $x \rightarrow -\infty$ , то  $y \sim x^{11/3}$ .

Построим соответствующие графики на бесконечности (рис. 99).

Схема эскизирования графика функции выглядит следующим образом:

- 1<sup>0</sup> Находят область определения, граничные точки области определения и точки разрыва.
- 2<sup>0</sup> Исследуют функцию на четность (нечетность), периодичность.
- 3<sup>0</sup> Находят нули функции.
- 4<sup>0</sup> Исследуют поведение функции в окрестности граничных точек, точек разрыва, в нулях и на бесконечности. Каждый этап исследования функции по этой схеме необходимо сопровождать соответствующим построением.

## § 7. Примеры построения эскизов графиков функций

1.  $y = x^2(x-2)(x+1)$ .

1<sup>0</sup> Область определения — вся числовая ось; точек разрыва нет.

2<sup>0</sup> Функция общего вида.

3<sup>0</sup> Функция обращается в нуль при  $x=0$ ,  $x=2$ ,  $x=-1$ .

4<sup>0</sup> Исследуем поведение функции в нулях: если  $x \rightarrow 0$ , то  $x^2(x-2)(x+1) \sim -2x^2$ ; если  $x \rightarrow -1$ , то  $x^2(x-2)(x+1) \sim -3(x+1)$ ; если  $x \rightarrow 2$ , то  $x^2(x-2) \times (x+1) \sim 12(x-2)$ .

Исследуем поведение функции на бесконечности: если  $x \rightarrow +\infty$ , то  $x^2(x-2)(x+1) \sim x^4$ ; если  $x \rightarrow -\infty$ , то  $x^2(x-2)(x+1) \sim x^4$ .

Наносим полученные результаты на рис. 100 и отдельные части графика (в силу непрерывности) соединяем сплошной линией. Идея эскизирования графиков и состоит в том, чтобы соединять сплошной линией не отдельные точки графика, а отдельные его части (куски). При необходимости полученный эскиз всегда можно уточнить с помощью методов, которые будут рассмотрены в разд. IV

2.  $y = (x-1)^2(x+1)^4(x-2)^3$

1<sup>0</sup> Область определения — вся числовая ось, точек разрыва нет.

2<sup>0</sup> Функция общего вида.

3<sup>0</sup> Нули функции точки  $x=1$ ,  $x=-1$ ,  $x=2$ .

4<sup>0</sup> Исследуем поведение функции в нулях и на бесконечности: если  $x \rightarrow -1$ , то  $(x-1)^2(x+1)^4(x-2)^3 \sim -108(x+1)^4$ ; если  $x \rightarrow 1$ , то  $(x-1)^2 \times (x+1)^4(x-2)^3 \sim -16(x-1)^2$ ; если  $x \rightarrow 2$ , то  $(x-1)^2(x+1)^4(x-2)^3 \sim 81(x-2)^3$ ; если  $x \rightarrow \pm\infty$ , то  $(x-1)^2(x+1)^4(x-2)^3 \sim x^9$ .

Эскиз графика изображен на рис. 101.

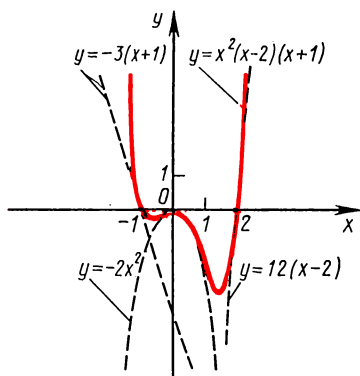


Рис. 100

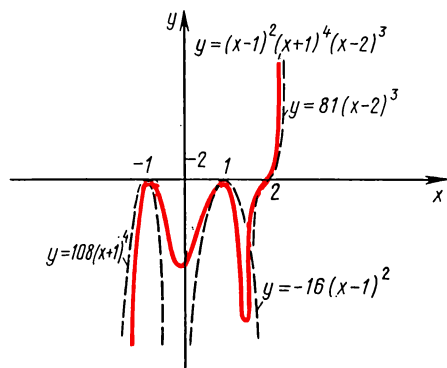


Рис. 101



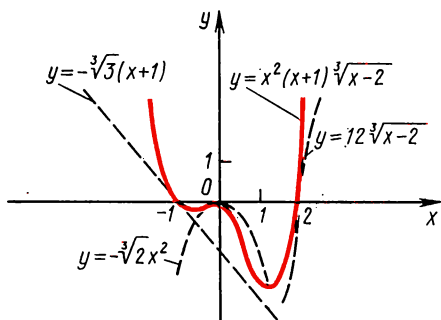


Рис. 102

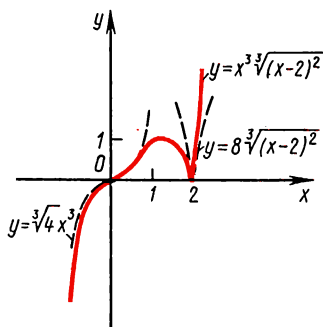


Рис. 103

---


$$3. y = x^2(x+1)^3\sqrt[3]{x-2}.$$


---

1°. Область определения — вся числовая ось; точек разрыва нет.

2°. Функция общего вида.

3°. Нули функции — точки  $x=0$ ,  $x=-1$ ,  $x=2$ .

4°. Исследуем поведение функции в нулях и на бесконечности: если  $x \rightarrow -1$ , то  $x^2(x+1)^3\sqrt[3]{x-2} \sim -\sqrt[3]{3}(x+1)$ ; если  $x \rightarrow 0$ , то  $x^2(x+1)^3\sqrt[3]{x-2} \sim \sqrt[3]{2}x^2$ ; если  $x \rightarrow 2$ , то  $x^2(x+1)^3\sqrt[3]{x-2} \sim 12\sqrt[3]{x-2}$ ; если  $x \rightarrow \pm\infty$ , то  $x^2(x+1)^3\sqrt[3]{x-2} \sim x^{10/3}$

Эскиз графика изображен на рис. 102.

---


$$4. y = x^3\sqrt[3]{(x-2)^2}.$$


---

1°. Область определения — вся числовая ось; точек разрыва нет.

2°. Функция общего вида.

3°. Функция обращается в нуль при  $x=0$ ,  $x=2$ .

4°. Исследуем поведение функции в нулях и на бесконечности: если  $x \rightarrow 0$ , то  $x^3\sqrt[3]{(x-2)^2} \sim \sqrt[3]{4}x^3$ ; если  $x \rightarrow 2$ , то  $x^3\sqrt[3]{(x-2)^2} \sim 8\sqrt[3]{(x-2)^2}$ ; если  $x \rightarrow \pm\infty$ , то  $x^3\sqrt[3]{(x-2)^2} \sim x^{11/3}$

Эскиз графика изображен на рис. 103.

---


$$5. y = \sqrt{x(1-x)(1+x)}.$$


---

1°. Область определения находим, решая неравенство  $x(1-x)(1+x) \geq 0$ , откуда  $x \leq -1$ ,  $0 \leq x \leq 1$ .

2°. Функция общего вида.

3°. Нули функции — точки  $x=0$ ,  $x=1$ ,  $x=-1$ .

4°. Исследуем поведение функции в нулях и на минус бесконечности: если  $x \rightarrow 0+0$ , то  $\sqrt{x(1-x)(1+x)} \sim \sqrt{x}$ ; если  $x \rightarrow -1-0$ , то  $\sqrt{x(1-x)(1+x)} \sim \sqrt{-2(1+x)}$ ; если  $x \rightarrow 1-0$ , то  $\sqrt{x(1-x)(1+x)} \sim \sqrt{-2(x-1)}$ ; если  $x \rightarrow -\infty$ , то  $\sqrt{x(1-x)(1+x)} \sim \sqrt{-x^3}$

Эскиз графика изображен на рис. 104.

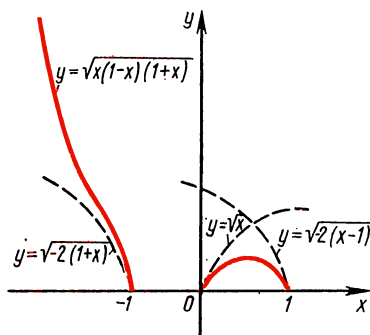


Рис. 104

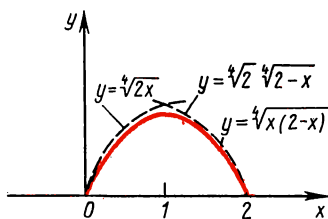


Рис. 105

---

6.  $y = \sqrt[4]{x(2-x)}$ .

---

1°. Область определения находим, решая неравенство  $x(2-x) \geq 0$ , откуда  $0 \leq x \leq 2$ .

2°. Функция общего вида.

3°. Нули функции — точки  $x=0$ ,  $x=2$ .

4°. Исследуем поведение функции в нулях: если  $x \rightarrow 0+0$ , то  $\sqrt[4]{x(2-x)} \sim \sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[4]{x}$ ; если  $x \rightarrow 2-0$ , то  $\sqrt[4]{x(2-x)} \sim \sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[4]{2-x}$ .

Эскиз графика изображен на рис. 105.

---

7.  $y = x^2 \ln(x-1)$ .

---

1°. Область определения находим, решая неравенство  $x-1 > 0$ , откуда  $x > 1$ .

2°. Функция общего вида.

3°. Нулем функции является точка  $x=2$ .

4°. Исследуем поведение функции в нуле и в граничной точке области определения: если  $x \rightarrow 2$ , то  $x^2 \ln(x-1) \sim 4 \ln(x-1)$ ; если  $x \rightarrow 1+0$ , то  $x^2 \ln(x-1) \sim \ln(x-1) \rightarrow -\infty$ . Отсюда следует, что  $x=1$  — вертикальная асимптота.

Исследуем поведение функции на бесконечности: если  $x \rightarrow +\infty$ , то  $x^2 \ln(x-1) \sim x^2 \ln x$ . Заметим, что при  $x > e$  имеем  $x^2 \ln x > x^2$ . Таким образом, данная функция на бесконечности растет быстрее, чем  $x^2$ .

Эскиз графика изображен на рис. 106.

---

8.  $y = \frac{1}{1+x^2}$ .

---

1°. Область определения — вся числовая ось.

2°. Функция четная.

3°. Нулей функция не имеет.

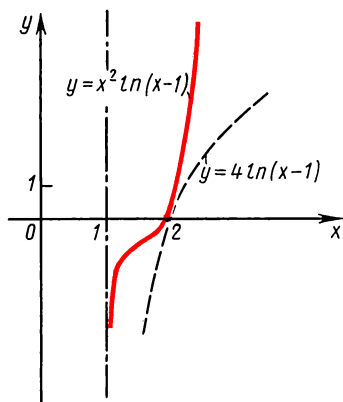


Рис. 106

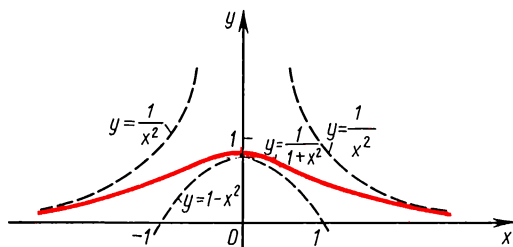


Рис. 107

4<sup>0</sup> Исследуем поведение функции на бесконечности: если  $x \rightarrow \infty$ , то  $\frac{1}{1+x^2} \sim \frac{1}{x^2} \rightarrow 0$ . Таким образом,  $y=0$  — горизонтальная асимптота.

Исследуем поведение функции при  $x \rightarrow 0$ . Так как при  $x \rightarrow 0$  можно считать  $|-x^2| < 1$ , то по формуле суммы членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии со знаменателем  $(-x^2)$  получим

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots$$

Ограничиваясь первыми двумя членами прогрессии, найдем, что  $\frac{1}{1+x^2} \sim 1 - x^2$  при  $x \rightarrow 0$ .

Эскиз графика изображен на рис. 107

9.  $y = \frac{x^2}{x^2 - 1}$ .

1<sup>0</sup> Область определения — вся числовая ось, за исключением двух точек разрыва  $x = -1$  и  $x = 1$ , в которых знаменатель обращается в нуль.

2<sup>0</sup> Функция четная.

3<sup>0</sup> Нуль функции — точка  $x = 0$ .

4<sup>0</sup> Исследуем поведение функции в нуле и на бесконечности: если  $x \rightarrow 0$ , то  $\frac{x^2}{x^2 - 1} \sim -x^2$ ; если  $x \rightarrow \infty$ , то  $\frac{x^2}{x^2 - 1} = \frac{1}{1 - \frac{1}{x^2}} \sim 1 + \frac{1}{x^2}$ .

Этот результат следует из формулы суммы членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии со знаменателем  $1/x^2 < 1$  ( $x \rightarrow \infty$ ):

$$\frac{1}{1 - \frac{1}{x^2}} = 1 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4} + \dots$$

Таким образом,  $y = 1$  — горизонтальная асимптота.

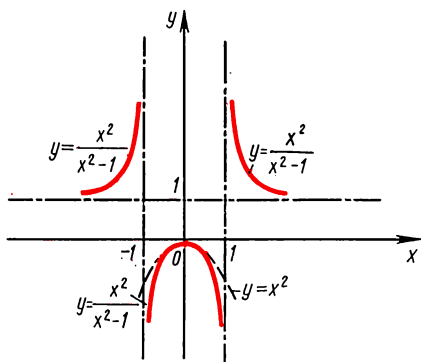


Рис. 108

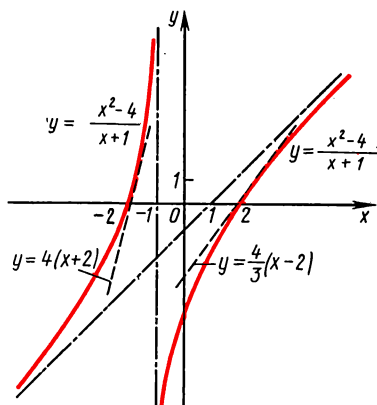


Рис. 109

Исследуем поведение функции в точках разрыва: если  $x \rightarrow 1$ , то

$$\frac{x^2}{x^2 - 1} = \frac{x^2}{(x-1)(x+1)} \sim \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x-1}.$$

Следовательно,  $x=1$ , а также в силу четности функции и  $x=-1$  — вертикальные асимптоты.

Эскиз графика изображен на рис. 108.

10.  $y = \frac{x^2 - 4}{x + 1}.$

1<sup>0</sup>. Область определения — вся числовая ось, кроме точки разрыва  $x = -1$ , в которой знаменатель обращается в нуль.

2<sup>0</sup> Функция общего вида.

3<sup>0</sup> Нули функции — точки  $x = -2$ ,  $x = 2$ .

4<sup>0</sup> Исследуем поведение функции в нулях и в точке разрыва: если  $x \rightarrow -2$ , то  $\frac{x^2 - 4}{x + 1} \sim 4(x + 2)$ ; если  $x \rightarrow 2$ , то  $\frac{x^2 - 4}{x + 1} \sim \frac{4}{3}(x - 2)$ ; если  $x \rightarrow -1$ , то  $\frac{x^2 - 4}{x + 1} \sim \frac{-3}{x + 1}$ . Значит,  $x = -1$  — вертикальная асимптота.

Исследуем поведение функции на бесконечности: при  $x \rightarrow \infty$  имеем

$$\begin{aligned} \frac{x^2 - 4}{x + 1} &= \left(x - \frac{4}{x}\right) \frac{1}{1 + \frac{1}{x}} = \\ &= \left(x - \frac{4}{x}\right) \left(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3} + \dots\right) = x - 1 - \frac{3}{x} + \frac{3}{x^2} - \dots \end{aligned}$$

Таким образом, если  $x \rightarrow \infty$ , то  $\frac{x^2 - 4}{x + 1} \sim x - 1$ . Отсюда следует, что  $y = x - 1$  — наклонная асимптота.

Эскиз графика изображен на рис. 109.

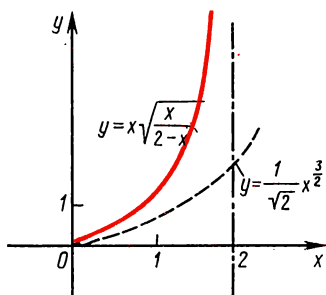


Рис. 110

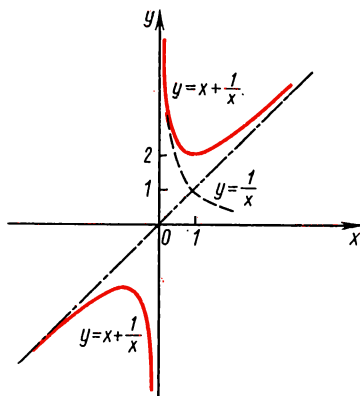


Рис. 111

---

11.  $y = x \sqrt{\frac{x}{2-x}}$ .

---

1<sup>0</sup> Область определения находим, решая неравенство  $\frac{x}{2-x} \geq 0$ , откуда  $0 \leq x < 2$ .

2<sup>0</sup> Функция общего вида.

3<sup>0</sup> Нуль функции — точка  $x = 0$ .

4<sup>0</sup> Исследуем поведение функции в нуле и в точке разрыва: если  $x \rightarrow 0+0$ , то  $x \sqrt{\frac{x}{2-x}} \sim \frac{1}{\sqrt{2}} x^{3/2}$ ; если  $x \rightarrow 2-0$ , то  $x \sqrt{\frac{x}{2-x}} \sim 2\sqrt{2} \frac{1}{\sqrt{2-x}} \rightarrow +\infty$ . Отсюда следует, что  $x = 2$  — вертикальная асимптота.

Эскиз графика изображен на рис. 110.

---

12.  $y = x + \frac{1}{x}$ .

---

1<sup>0</sup> Область определения — вся числовая ось, за исключением точки разрыва  $x = 0$ .

2<sup>0</sup> Функция нечетная.

3<sup>0</sup> Нулей функция не имеет.

4<sup>0</sup> Исследуем поведение функции в точке разрыва и на бесконечности: при  $x \rightarrow 0$  имеем  $x + \frac{1}{x} \sim \frac{1}{x}$  ( $x = 0$  — вертикальная асимптота); при  $x \rightarrow \infty$  имеем  $x + \frac{1}{x} \sim x$ . Поэтому  $y = x$  — наклонная асимптота.

Эскиз графика изображен на рис. 111.

## Раздел IV

### ОБЩАЯ СХЕМА ИССЛЕДОВАНИЯ ФУНКЦИЙ ПРИ ПОСТРОЕНИИ ГРАФИКОВ

#### § 1. Схема исследования функций с использованием производной

Методы математического анализа позволяют строить достаточно точный график заданной функции, если только удастся хорошо изучить ее свойства.

Изучение свойств функции при построении графика целесообразно проводить по следующей схеме:

- 1<sup>0</sup> Находят область определения и точки разрыва; вычисляют значения функции (или соответствующих пределов) в граничных точках области определения.
- 2<sup>0</sup> Исследуют вопрос о четности или нечетности, периодичности функции.
- 3<sup>0</sup> Определяют нули функции и интервалы ее знакопостоянства.
- 4<sup>0</sup> Находят асимптоты.
- 5<sup>0</sup> Исследуют функцию на экстремум, определяют интервалы ее монотонности.
- 6<sup>0</sup> Находят точки перегиба и интервалы выпуклости и вогнутости графика функции.

При нахождении нулей, точек разрыва, граничных точек, а также асимптот следует изучить асимптотику поведения функции в окрестностях указанных точек. Это значительно облегчит построение графика.

Полезно каждый этап исследования функции по данной схеме сопровождать соответствующим построением.

Отметим, что эта далеко не полная схема позволяет тем не менее успешно строить графики подавляющего большинства функций, встречающихся на практике.

#### § 2. Применение ряда Тейлора к исследованию функций

Мощным средством изучения свойств функции является разложение функции в ряд Тейлора.

О п р е д е л е н и е. Выражение

$$u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_k + \dots,$$

где  $u_k$  — числа, зависящие в силу некоторого закона от натурального индекса  $k$  ( $k=0, 1, 2, \dots$ ), называется *рядом*.

Обозначим через  $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} u_k$  сумму его первых  $n$  членов. Числа  $S_n$  образуют последовательность  $\{S_n\} = \{S_1, S_2, S_3, \dots\}$ . Если она сходится, т. е. существует конечный предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$ , то говорят, что ряд *сходится* и имеет сумму, равную  $S$ . При этом пишут

$$S = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_k + \dots$$

Если функция  $f(x)$  имеет в некоторой окрестности точки  $x_0$  производные сколь угодно высокого порядка, то для нее чисто формально можно написать ряд

$$f(x) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots,$$

который называется *рядом Тейлора* функции  $f(x)$  по степеням  $x-x_0$ . Для данных значений  $x_0$  и  $x$  он может сходиться или расходиться.

В курсе анализа доказывается следующее утверждение.

*Ряд Тейлора функции  $f(x)$  сходится к самой функции, т. е. имеет своей суммой  $f(x)$ , тогда и только тогда, когда остаточный член  $R_n(x)$  в формуле Тейлора стремится к нулю при  $n \rightarrow \infty$ .*

Таким образом,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + R_n(x),$$

и если  $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$ , то

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots$$

Справедливы следующие разложения в ряд Тейлора при  $x_0 = 0$  (в скобках указаны интервалы, в которых эти разложения справедливы\*):

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \quad (-\infty < x < \infty);$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \quad (-\infty < x < \infty);$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots \quad (-\infty < x < \infty);$$

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \dots \quad (-1 < x < 1);$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \quad (-1 < x \leq 1);$$

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots \quad (-1 \leq x \leq 1);$$

---

\* Определения  $\operatorname{sh} x$  и  $\operatorname{ch} x$  приведены на с. 83.

$$\begin{aligned}\operatorname{tg} x &= x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \dots & \left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right); \\ \arcsin x &= x + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{x^5}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{x^7}{7} + \dots & (-1 < x < 1); \\ \operatorname{sh} x &= x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \dots & (-\infty < x < \infty); \\ \operatorname{ch} x &= 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \dots & (-\infty < x < \infty).\end{aligned}$$

На рис. 112 изображена кривая  $y = f(x)$ . В качестве ее нулевого приближения (асимптотики) в окрестности точки  $x_0 = 0$  естественно взять график функции  $y_0(x) = f(0)$ , т. е. прямую, параллельную оси  $x$ . В качестве же первого приближения к данной кривой естественно взять касательную к ней в точке  $x = 0$ , т. е.

$$y_1(x) = f(0) + f'(0)x.$$

Соответственно второе приближение имеет вид

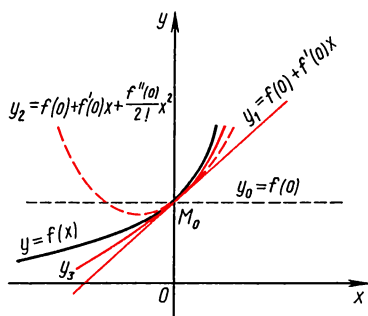


Рис. 112

$$y_2(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2$$

Таким образом, каждое последующее приближение дает график, прилегающий к графику  $f(x)$  все теснее и теснее, во всяком случае в достаточно малой окрестности точки  $x=0$  (рис. 112). Поэтому при исследовании свойств функции полезно заменять заданную функцию на ее асимптотику в окрестности данной точки, полученную с помощью ряда Тейлора, в котором обычно ограничиваются несколькими первыми членами разложения.

### § 3. Примеры применения общей схемы

---

1.  $y = x(x+1)(x-1)$ .

---

$1^0$  Область определения — вся числовая ось. Точек разрыва нет. Граничные значения функции:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(x+1)(x-1) = +\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x(x+1)(x-1) = -\infty$ .

$2^0$  Функция неперiodическая, нечетная.

$3^0$  Функция имеет три нуля:  $x=0$ ,  $x=-1$ ,  $x=1$ . Решаем неравенство  $x(x+1)(x-1) > 0$ . Его решением служит объединение двух интервалов:  $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$ .

Таким образом, функция положительна на интервалах  $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$  и отрицательна на интервалах  $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$  (последнее следует из нечетности функции).



4<sup>0</sup> Найдем угловой коэффициент наклонной асимптоты:  $k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} (x-1)(x+1) = \infty$ . Значит, наклонных, а следовательно, и горизонтальных асимптот нет. Вертикальных асимптот также не имеется (нет точек разрыва).

5<sup>0</sup> Найдем производную:  $y' = 3x^2 - 1$ .

Решаем неравенства  $y' > 0$  и  $y' < 0$ . Имеем:  $y' > 0$  или  $3x^2 - 1 > 0$ , откуда  $x < -1/\sqrt{3}$ ,  $x > 1/\sqrt{3}$ ;  $y' < 0$ , откуда  $-1/\sqrt{3} < x < 1/\sqrt{3}$ . Таким образом, на интервалах  $(-\infty, -1/\sqrt{3}) \cup (1/\sqrt{3}, +\infty)$  функция монотонно возрастает, а на интервале  $(-1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$  — монотонно убывает.

Приравнявая производную нулю, находим критические точки I рода:  $y' = 3x^2 - 1 = 0$ , откуда  $x = 1/\sqrt{3}$ ,  $x = -1/\sqrt{3}$ .

Рисуем схему (рис. 113, а), из которой следует, что в точке  $x = -1/\sqrt{3}$  функция имеет максимум, а в точке  $x = 1/\sqrt{3}$  — минимум. Находим значения функции в экстремальных точках: если  $x_{\max} = -1/\sqrt{3}$ , то  $y_{\max} = 2/(3\sqrt{3})$ ; если  $x_{\min} = 1/\sqrt{3}$ , то  $y_{\min} = -2/(3\sqrt{3})$ .

6<sup>0</sup> Находим вторую производную:  $y'' = 6x$ .

Решаем неравенства  $y'' > 0$  и  $y'' < 0$ . Имеем:  $y'' > 0$  или  $6x > 0$ , откуда  $x > 0$ ;  $y'' < 0$ , откуда  $x < 0$ .

Приравнявая вторую производную нулю, найдем критическую точку II рода:  $y'' = 6x = 0$ , откуда  $x = 0$ .

Рисуем схему (рис. 113, б), из которой следует, что в точке  $x = 0$  функция имеет перегиб (это также следует из нечетности функции). На интервале  $(-\infty, 0)$  функция выпукла вверх, а на интервале  $(0, +\infty)$  — выпукла вниз. Находим ординату точки перегиба:  $y_{\text{пер}} = 0$ .

График функции изображен на рис. 113, в. При построении пользуемся симметрией графика относительно начала координат.

$$2. y = (x^2 + 1)(x - 1).$$

1<sup>0</sup> Область определения — вся числовая ось. Точек разрыва нет. Граничные значения функции:  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 + 1)(x - 1) = +\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + 1)(x - 1) = -\infty$ .

2<sup>0</sup> Функция непериодическая, общего вида.

3<sup>0</sup> Функция имеет один нуль в точке  $x = 1$ .

4<sup>0</sup> Найдем угловой коэффициент наклонной асимптоты:  $k =$

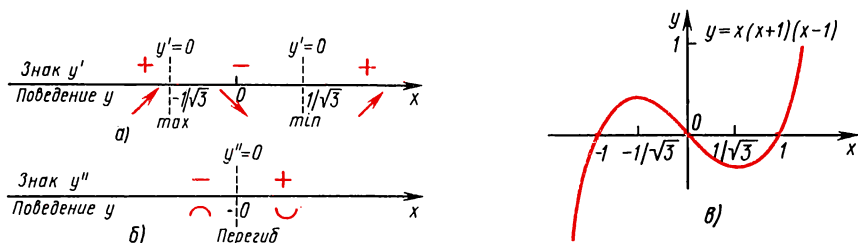


Рис. 113

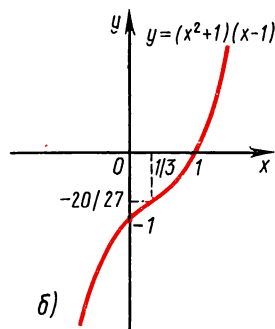


Рис. 114

$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x^2 + 1)(x - 1)}{x} = \infty$ . Наклонных, а следовательно, и горизонтальных асимптот нет. Нет и вертикальных асимптот (нет точек разрыва).

5<sup>0</sup> Найдем производную:  $y' = 3x^2 - 2x + 1$ .

На всей числовой оси  $y' = 3x^2 - 2x + 1 > 0$ , т. е. функция монотонно возрастает. Экстремумов нет.

6<sup>0</sup>. Находим вторую производную:  $y'' = 6x - 2$ .

Решаем неравенства  $y'' > 0$  и  $y'' < 0$ . Имеем:  $y'' > 0$  или  $6x - 2 > 0$ , откуда  $x > 1/3$ ;  $y'' < 0$ , откуда  $x < 1/3$ .

Приравняв вторую производную нулю, найдем критическую точку II рода:  $y'' = 6x - 2 = 0$ , откуда  $x = 1/3$ .

Из схемы (рис. 114, а) следует, что в точке  $x = 1/3$  функция имеет перегиб. На интервале  $(-\infty, 1/3)$  функция выпукла вверх, а на интервале  $(1/3, +\infty)$  — выпукла вниз. Найдем ординату точки перегиба:  $y_{\text{пер}} = -20/27$ .

График функции изображен на рис. 114, б.

$$3. y = x^4 - 2x^3 - 1.$$

1<sup>0</sup> Область определения — вся числовая ось. Точек разрыва нет. Граничные значения функции:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^4 - 2x^3 - 1) = +\infty$ ;  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^4 - 2x^3 - 1) = +\infty$ .

2<sup>0</sup> Функция общего вида, непериодическая.

3<sup>0</sup> Нахождение нулей функции и интервалов знакопостоянства в данном случае затруднительно. Поэтому переходим к следующему пункту.

4<sup>0</sup> Найдем угловой коэффициент наклонной асимптоты:  $k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 - 2x^3 - 1}{x} = \infty$ . Асимптот нет.

5<sup>0</sup> Найдем производную:  $y' = 4x^3 - 6x^2$

Решаем неравенства  $y' > 0$  и  $y' < 0$ . Имеем:  $y' > 0$  или  $4x^3 - 6x^2 > 0$ , откуда  $x > 3/2$ ;  $y' < 0$ , откуда  $x < 0$ ,  $0 < x < 3/2$ . На интервалах  $(-\infty, 0) \cup (0, 3/2)$  функция монотонно убывает, а на интервале  $(3/2, +\infty)$  — монотонно возрастает.

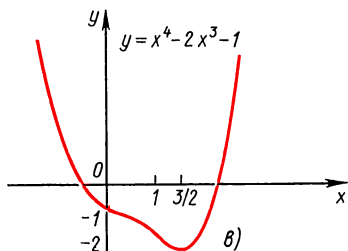
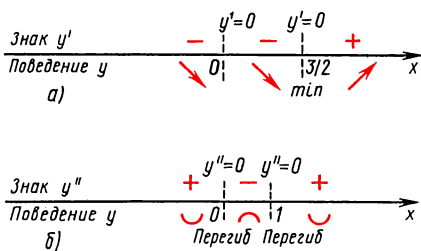


Рис. 115

Приравнявая производную нулю, находим критические точки I рода:  $y' = 4x^3 - 6x^2 = 0$ , откуда  $x = 0$ ,  $x = 3/2$ .

Из схемы (рис. 115, а) следует, что в точке  $x = 3/2$  функция имеет минимум. Найдем ординату точки минимума:  $y_{\min} = -2\frac{11}{16}$ .

6<sup>0</sup> Находим вторую производную:  $y'' = 12x^2 - 12x$ .

Решаем неравенства  $y'' > 0$  и  $y'' < 0$ . Имеем:  $y'' > 0$  или  $12x^2 - 12x > 0$ , откуда  $x < 0$ ,  $x > 1$ ;  $y'' < 0$ , откуда  $0 < x < 1$ .

Приравнявая вторую производную нулю, находим критические точки II рода:  $y'' = 12x^2 - 12x = 0$ , откуда  $x = 0$ ,  $x = 1$ .

Из схемы (рис. 115, б) следует, что в точках  $x = 0$  и  $x = 1$  функция имеет перегибы. На интервалах  $(-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$  функция выпукла вниз, а на интервале  $(0, 1)$  — выпукла вверх. Найдем ординаты точек перегиба: если  $x = 0$ , то  $y_{\text{пер}} = -1$ ; если  $x = 1$ , то  $y_{\text{пер}} = -2$ .

График функции изображен на рис. 115, в.

---


$$4. y = -\frac{1}{5}x^5 + x + 4.$$


---

1<sup>0</sup>. Область определения — вся числовая ось. Точек разрыва нет. Граничные значения функции:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{5}x^5 + x + 4\right) = -\infty$ ;  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\frac{1}{5}x^5 + x + 4\right) = +\infty$ .

2<sup>0</sup>. Функция общего вида, непериодическая.

3<sup>0</sup>. Нахождение нулей функции и интервалов знакопостоянства в данном случае затруднительно.

4<sup>0</sup>. Найдем угловой коэффициент наклонной асимптоты:  $k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-\frac{1}{5}x^5 + x + 4}{x} = -\infty$ . Асимптот нет.

5<sup>0</sup> Найдем производную:  $y' = -x^4 + 1$ .

Решаем неравенства  $y' > 0$  и  $y' < 0$ . Имеем:  $y' > 0$  или  $-x^4 + 1 > 0$ , откуда  $-1 < x < 1$ ;  $y' < 0$ , откуда  $x < -1$ ;  $x > 1$ . На интервалах  $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$  функция монотонно убывает, а на интервале  $(-1, 1)$  — монотонно возрастает.

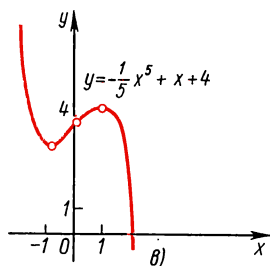
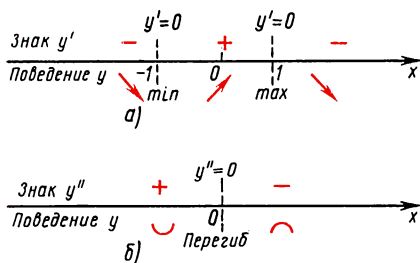


Рис. 116

Приравнявая производную нулю, находим критические точки I рода:  $y' = -x^4 + 1 = 0$ , откуда  $x = -1$ ,  $x = 1$ .

Из схемы (рис. 116, а) следует, что в точке  $x = -1$  функция имеет минимум, а в точке  $x = 1$  — максимум. Найдем ординаты экстремальных точек: если  $x = -1$ , то  $y_{\min} = 3,2$ ; если  $x = 1$ , то  $y_{\max} = 4,8$ .

6<sup>0</sup> Найдим вторую производную:  $y'' = -4x^3$ . На интервале  $(-\infty, 0)$  имеем  $y'' > 0$ , а на интервале  $(0, +\infty)$  имеем  $y'' < 0$ . В точке  $x = 0$  (критической точке II рода) вторая производная обращается в нуль.

Из схемы (рис. 116, б) следует, что в точке  $x = 0$  функция имеет перегиб, на интервале  $(-\infty, 0)$  функция выпукла вниз, а на интервале  $(0, +\infty)$  — выпукла вверх. Ордината точки перегиба  $y_{\text{пер}} = 4$ .

График функции изображен на рис. 116, в.

$$5. y = \frac{2x+1}{3-x}.$$

1<sup>0</sup> Область определения — вся числовая ось, кроме точки  $x = 3$ , в которой функция имеет разрыв.

Граничные значения функции:  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x+1}{3-x} = -2$ ;  $\lim_{x \rightarrow 3-0} \frac{2x+1}{3-x} = +\infty$ ;

$\lim_{x \rightarrow 3+0} \frac{2x+1}{3-x} = -\infty$ ;  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+1}{3-x} = -2$ . Отсюда следует, что существуют вертикальная асимптота  $x = 3$  и горизонтальная асимптота  $y = -2$ .

2<sup>0</sup> Функция общего вида, непериодическая.

3<sup>0</sup> Функция имеет один нуль в точке  $x = -1/2$ .

Для нахождения интервалов знакопостоянства решаем неравенства  $y > 0$  и  $y < 0$ . Имеем  $y > 0$  или  $\frac{2x+1}{3-x} > 0$ , откуда  $-1/2 < x < 3$ ;  $y < 0$ , откуда  $x < -1/2$ ;  $x > 3$ .

Функция положительна на интервале  $(-1/2, 3)$  и отрицательна на интервалах  $(-\infty, -1/2) \cup (3, +\infty)$ .

4<sup>0</sup> Найдем параметры наклонной асимптоты:

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x+1}{x(3-x)} = 0; \quad b = \lim_{x \rightarrow \infty} (y - kx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x+1}{3-x} = -2.$$

Наклонных асимптот нет, имеются вертикальная асимптота  $x = 3$  и горизонтальная асимптота  $y = -2$ .

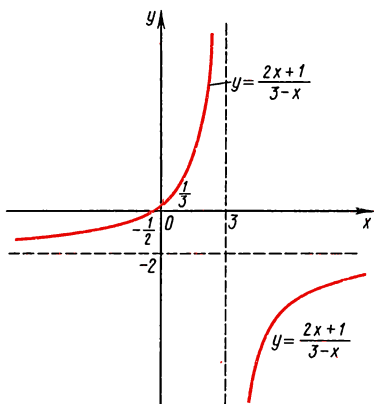


Рис. 117

точек перегиба нет. На интервале  $(-\infty, 3)$  функция выпукла вниз, а на интервале  $(3, +\infty)$  — выпукла вверх.

График функции изображен на рис. 117.

---


$$6. y = \frac{2x}{x^2 + 1}.$$


---

1<sup>0</sup> Область определения — вся числовая ось. Точек разрыва нет.

Граничные значения:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{x^2 + 1} = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{x^2 + 1} = 0$ .

2<sup>0</sup> Функция неперiodическая, нечетная.

3<sup>0</sup> Функция имеет один нуль в точке  $x=0$ . Функция положительна на интервале  $(0, +\infty)$  и отрицательна на интервале  $(-\infty, 0)$ .

4<sup>0</sup> Найдем параметры наклонной асимптоты:

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{x(x^2 + 1)} = 0; \quad b = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{x^2 + 1} = 0.$$

Таким образом, имеется горизонтальная асимптота  $y=0$ .

5<sup>0</sup> Найдем производную:  $y' = \frac{-2x^2 + 2}{(x^2 + 1)^2}$ .

Решаем неравенства  $y' > 0$  и  $y' < 0$ . Имеем:  $y' > 0$  или  $\frac{-2x^2 + 2}{(x^2 + 1)^2} > 0$ , откуда  $-1 < x < 1$ ;  $y' < 0$ , откуда  $x < -1$ ;  $x > 1$ . На интервалах  $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$  функция монотонно убывает, а на интервале  $(-1, 1)$  — монотонно возрастает.

Приравнявая производную нулю, находим критические точки I рода:

$$y' = \frac{-2x^2 + 2}{(x^2 + 1)^2} = 0, \text{ откуда } x = -1, x = 1.$$

Из схемы (рис. 118, а) следует, что в точке  $x = -1$  функция имеет минимум, а в точке  $x = 1$  — максимум. Найдем ординаты экстремальных точек: если  $x = -1$ , то  $y_{\min} = -1$ ; если  $x = 1$ , то  $y_{\max} = 1$ .

5<sup>0</sup>. Найдем производную:

$$y' = \frac{7}{(-x+3)^2}.$$

Производная положительна всюду, где функция определена. Таким образом, функция монотонно возрастает на интервалах  $(-\infty, 3) \cup (3, +\infty)$ ; экстремумов нет.

6<sup>0</sup> Находим вторую производную:

$$y'' = \frac{14}{(-x+3)^3}.$$

Решаем неравенства  $y'' > 0$  и  $y'' < 0$ .

Имеем:  $y'' > 0$  или  $\frac{14}{(-x+3)^3} > 0$ , откуда

$x < 3$ ;  $y'' < 0$ , откуда  $x > 3$ . Вторая производная нигде не обращается в нуль;

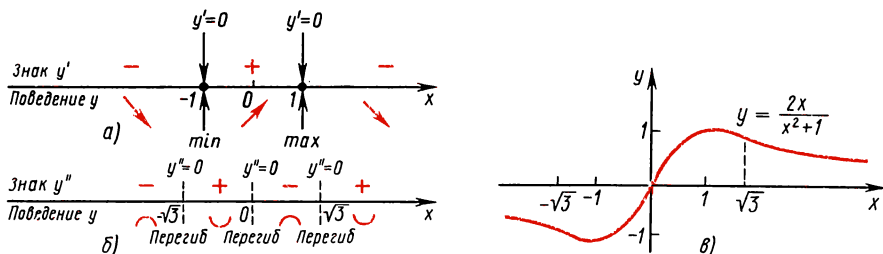


Рис. 118

6<sup>0</sup> Находим вторую производную:  $y'' = \frac{4x^3 - 12x}{(x^2 + 1)^3}$ .

Решаем неравенства  $y'' > 0$  и  $y'' < 0$ . Имеем:  $y'' > 0$  или  $\frac{4x^3 - 12x}{(x^2 + 1)^3} > 0$ , откуда  $-\sqrt{3} < x < 0$ ,  $x > \sqrt{3}$ ;  $y'' < 0$ , откуда  $0 < x < \sqrt{3}$ ,  $x < -\sqrt{3}$ .

Приравняв вторую производную нулю, находим критические точки

II рода:  $y'' = \frac{4x^3 - 12x}{(x^2 + 1)^3} = 0$ , откуда  $x = 0$ ,  $x = -\sqrt{3}$ ;  $x = \sqrt{3}$ .

Из схемы (рис. 118, б) следует, что в точках  $x = 0$ ,  $x = -\sqrt{3}$ ,  $x = \sqrt{3}$  функция имеет перегибы; на интервалах  $(-\sqrt{3}, 0) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$  функция выпукла вниз, а на интервалах  $(0, \sqrt{3}) \cup (-\infty, -\sqrt{3})$  — выпукла вверх. Найдем ординаты точек перегиба: если  $x = 0$ , то  $y_{\text{пер}} = 0$ ; если  $x = -\sqrt{3}$ , то  $y_{\text{пер}} = -\sqrt{3}/2$ ; если  $x = \sqrt{3}$ , то  $y_{\text{пер}} = \sqrt{3}/2$ .

График функции изображен на рис. 118, в.

$$7. y = \frac{x}{x^2 - 4}.$$

1<sup>0</sup> Область определения — вся числовая ось, кроме точек  $x = 2$  и  $x = -2$ , в которых функция терпит разрывы.

Граничные значения функции:  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x^2 - 4} = 0$ ;  $\lim_{x \rightarrow -2-0} \frac{x}{x^2 - 4} = -\infty$ ;

$\lim_{x \rightarrow -2+0} \frac{x}{x^2 - 4} = +\infty$ ;  $\lim_{x \rightarrow 2-0} \frac{x}{x^2 - 4} = -\infty$ ;  $\lim_{x \rightarrow 2+0} \frac{x}{x^2 - 4} = +\infty$ ;  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^2 - 4} = 0$ .

Отсюда следует, что существуют две вертикальные асимптоты  $x = 2$  и  $x = -2$  и горизонтальная асимптота  $y = 0$ .

2<sup>0</sup> Функция неперiodическая, нечетная.

3<sup>0</sup> Функция имеет один нуль в точке  $x = 0$ .

Для нахождения интервалов знакопостоянства решаем неравенство  $y' > 0$  или  $\frac{x}{x^2 - 4} > 0$ , откуда  $-2 < x < 0$  и  $x > 2$ . Функция положительна на интервалах  $(-2, 0) \cup (2, +\infty)$  и отрицательна (в силу нечетности) на интервалах  $(-\infty, -2) \cup (0, 2)$ .

4<sup>0</sup> Найдем параметры наклонной асимптоты:

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x(x^2 - 4)} = 0; \quad b = \lim_{x \rightarrow \infty} (y - kx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x^2 - 4} = 0.$$

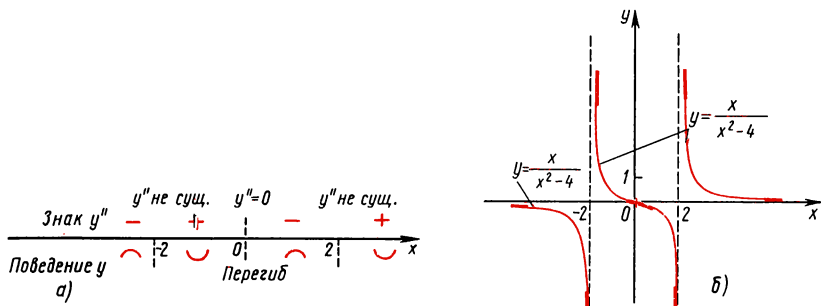


Рис. 119

Наклонных асимптот нет, имеется горизонтальная асимптота  $y=0$ .

5<sup>0</sup> Найдем производную:  $y' = -\frac{x^2+4}{(x^2-4)^2}$ .

Производная отрицательна на всей числовой оси, кроме точек  $x=2$  и  $x=-2$ , где она не существует (в этих точках и сама функция не существует). Функция монотонно убывает всюду, где она определена.

6<sup>0</sup>. Находим вторую производную:  $y'' = \frac{2x(x^2+12)}{(x^2-4)^3}$ .

Решаем неравенства  $y''>0$  и  $y''<0$ . Имеем:  $y''>0$  или  $\frac{2x(x^2+12)}{(x^2-4)^3}>0$ , откуда  $-2<x<0$ ,  $x>2$ ;  $y''<0$ , откуда  $x<-2$ ,  $0<x<2$ .

Приравняв вторую производную нулю, находим критическую точку II рода:  $x=0$ .

Из схемы (рис. 119, а) следует, что в точке  $x=0$  функция имеет перегиб (это следует также и из нечетности функции); на интервалах  $(-2, 0) \cup (2, +\infty)$  функция выпукла вниз, а на интервалах  $(-\infty, -2) \cup (0, 2)$  — выпукла вверх. Найдем ординату точки перегиба:  $y=0$ .

График функции изображен на рис. 119, б.

Полезно провести эскизирование этого графика. Так как  $y = \frac{x}{(x-2)(x+2)}$ , то при  $x \rightarrow 0$  имеем  $y \sim -4x$ ; при  $x \rightarrow 2$  получим  $y \sim \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x-2}$ ; при  $x \rightarrow -2$  находим  $y \sim \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x+2}$ ; наконец, при  $x \rightarrow \infty$  имеем  $y \sim \frac{1}{x} \rightarrow 0$ .

Таким образом, становится ясным поведение функции при  $x=0$  и в окрестности точек разрыва и на бесконечности (рис. 119, б).

$$8. y = \frac{x^3}{2(x+1)^2}.$$

1<sup>0</sup> Область определения — вся числовая ось, кроме точки  $x=-1$ , в которой функция терпит разрыв. Граничные значения функции:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{2(x+1)^2} = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow -1-0} \frac{x^3}{2(x+1)^2} = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow -1+0} \frac{x^3}{2(x+1)^2} = -\infty;$$

$\lim_{x \rightarrow -1-0} \frac{x^3}{2(x+1)^2} = -\infty$ . Отсюда следует, что существует вертикальная асимптота  $x = -1$ .

2<sup>0</sup> Функция общего вида, неперiodическая.

3<sup>0</sup> Функция имеет один нуль в точке  $x=0$ . Функция положительна при  $x>0$  и отрицательна при  $x<0$ .

4<sup>0</sup> Найдем параметры наклонной асимптоты:

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{2x(x+1)^2} = \frac{1}{2};$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} (y - kx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^3}{2(x+1)^2} - \frac{1}{2}x \right) = -1.$$

Уравнение наклонной асимптоты есть  $y = \frac{1}{2}x - 1$ .

5<sup>0</sup> Найдем производную:  $y' = \frac{x^2(x+3)}{2(x+1)^3}$ .

Решаем неравенства  $y' > 0$  и  $y' < 0$ . Имеем:  $y' > 0$  или  $\frac{x^2(x+3)}{2(x+1)^3} > 0$ , откуда  $x < -3$ ,  $-1 < x < 0$ ,  $x > 0$ ;  $y' < 0$ , откуда  $-3 < x < -1$ . На интервалах  $(-\infty, -3) \cup (-1, 0) \cup (0, +\infty)$  функция монотонно возрастает, на интервале  $(-3, -1)$  — монотонно убывает.

Приравнявая производную нулю, находим критические точки I рода:  $x=0$ ,  $x=-3$ .

Из схемы (рис. 120, а) следует, что в точке  $x=-3$  функция имеет максимум, а в точке  $x=0$  экстремума нет. Найдем ординату точки максимума:  $y_{\max} = -3\frac{3}{8}$ .

6<sup>0</sup> Находим вторую производную:  $y'' = \frac{3x}{(x+1)^4}$ .

Вторая производная положительна на интервале  $(0, +\infty)$  и отрицательна на интервалах  $(-\infty, -1) \cup (-1, 0)$ . Критическая точка II рода  $x=0$ .

Из схемы (рис. 120, б) следует, что в точке  $x=0$  функция имеет перегиб; на интервалах  $(-\infty, -1) \cup (-1, 0)$  функция выпукла вверх, на интервале  $(0, +\infty)$  — выпукла вниз. Ордината точки перегиба  $y_{\text{пер}} = 0$ .

График функции изображен на рис. 120, в.

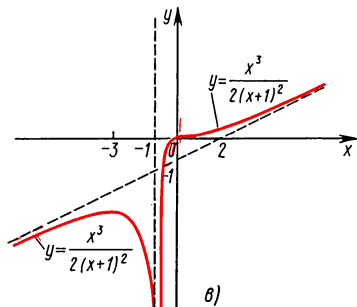
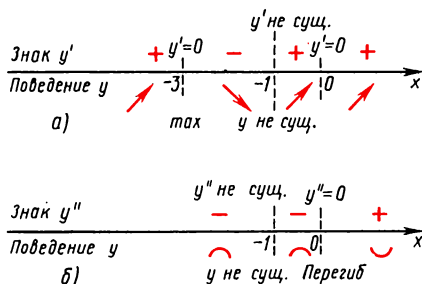


Рис. 120



---


$$9. y = \sqrt{x} + \sqrt{4-x}.$$


---

1<sup>0</sup> Область определения — отрезок  $[0, 4]$ . Найдем граничные значения функции: если  $x=0$ , то  $y=2$ ; если  $x=4$ , то  $y=2$ . Точек разрыва нет.

2<sup>0</sup> Функция общего вида, непериодическая.

3<sup>0</sup> Функция нулей не имеет, положительна на всем отрезке  $[0, 4]$ .

4<sup>0</sup> Наклонных асимптот нет, так как область определения — конечный отрезок.

5<sup>0</sup> Найдем производную:  $y' = \frac{\sqrt{4-x} - \sqrt{x}}{2\sqrt{x}\sqrt{4-x}}.$

Решаем неравенства  $y' > 0$  и  $y' < 0$ . Имеем:  $y' > 0$  или  $\frac{\sqrt{4-x} - \sqrt{x}}{2\sqrt{x}\sqrt{4-x}} > 0$ , откуда  $0 < x < 2$ ;  $y' < 0$ , откуда  $2 < x < 4$ . На интервале  $(0, 2)$  функция монотонно возрастает, а на интервале  $(2, 4)$  — монотонно убывает.

Приравняв производную нулю, находим критическую точку I рода:  $y' = 0$ , откуда  $x = 2$ .

Из схемы (рис. 121, а) следует, что в точке  $x = 2$  функция имеет максимум. Ордината точки максимума  $y_{\max} = 2\sqrt{2}$ .

6<sup>0</sup> Находим вторую производную:  $y'' = -\frac{1}{4} \cdot \frac{(4-x)^{3/2} + x^{3/2}}{x^{3/2}(4-x)^{3/2}}$ . На интервале  $(0, 4)$  вторая производная отрицательна и, значит, функция выпукла вверх.

График функции изображен на рис. 121, б. Отметим, что первая производная стремится к  $+\infty$ , когда  $x$  приближается справа к 0 или слева к 4. Геометрически это означает, что график функции в точке  $x=0$ ;  $y=2$  касается оси ординат, а в точке  $x=4$ ,  $y=2$  — вертикальной прямой  $x=4$ .

---

$$10. y = x - \sqrt[3]{x^2}$$


---

1<sup>0</sup> Область определения — вся числовая ось. Точек разрыва нет. Граничные значения функции:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x - \sqrt[3]{x^2}) = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \sqrt[3]{x^2}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(1 - \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right) = +\infty.$$

2<sup>0</sup> Функция общего вида, непериодическая.

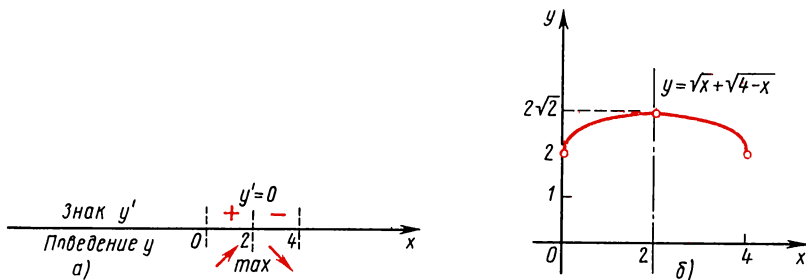


Рис. 121

3°. Нулями функции являются точки  $x=0$  и  $x=1$ . Функция положительна при  $x>1$  и отрицательна на интервалах  $(-\infty, 0) \cup (0, 1)$ .

4°. Найдем параметры наклонной асимптоты:

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - \sqrt[3]{x^2}}{x} = 1; \quad b = \lim_{x \rightarrow \infty} [(x - \sqrt[3]{x^2}) - x] = -\infty.$$

Наклонных асимптот нет.

5°. Найдем производную:  $y' = 1 - \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$ .

Решаем неравенства  $y' > 0$  и  $y' < 0$ . Имеем:  $y' > 0$  или  $1 - \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} > 0$ , откуда  $x < 0$ ,  $x > 8/27$ ;  $y' < 0$ , откуда  $0 < x < 8/27$ . На интервалах  $(-\infty, 0) \cup (8/27, +\infty)$  функция монотонно возрастает, на интервале  $(0, 8/27)$  — монотонно убывает.

Приравнявая производную нулю, находим критическую точку I рода:  $y' = 1 - \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} = 0$ , откуда  $x = 8/27$ . Кроме того, критической точкой I рода служит точка  $x=0$ , в которой производная не существует.

Из схемы (рис. 122, а) следует, что в точке  $x=0$  функция имеет максимум, в точке  $x=8/27$  — минимум. Найдем ординаты экстремальных точек: если  $x=0$ , то  $y_{\max}=0$ ; если  $x=8/27$ , то  $y_{\min}=-4/27$ .

6°. Находим вторую производную:  $y'' = \frac{2}{9} \frac{1}{x^{4/3}}$ . Вторая производная всюду положительна, кроме точки  $x=0$ , где она не существует. Поэтому функция выпукла вниз на интервалах  $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ .

График функции изображен на рис. 122, б.

11.  $y = \sqrt[3]{x^2 - 3x + 2}$ .

1°. Область определения — вся числовая ось. Точек разрыва нет. Найдем граничные значения функции:  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt[3]{x^2 - 3x + 2} = +\infty$ ;  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x^2 - 3x + 2} = +\infty$ .

2°. Функция общего вида, непериодическая.

3°. Нули функции — точки  $x=2$ ,  $x=1$ . Функция положительна на интервалах  $(-\infty, 1) \cup (2, +\infty)$  и отрицательна на интервале  $(1, 2)$ .

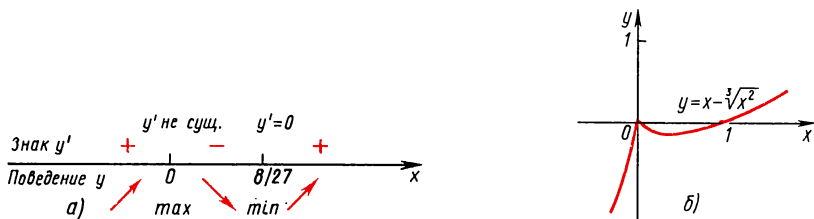


Рис. 122

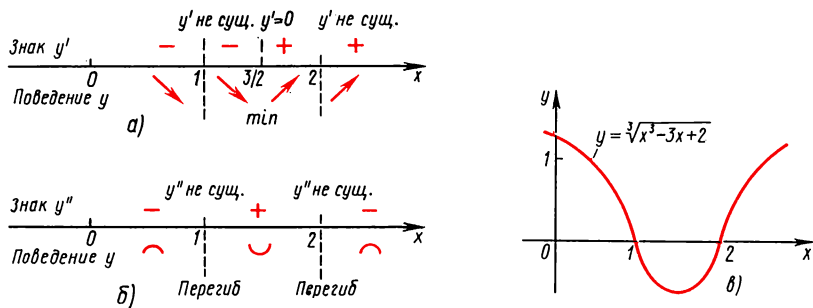


Рис. 123

4<sup>0</sup> Найдем параметры наклонной асимптоты:

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{x^3 - 3x + 2}}{x} = 0, \quad b = \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[3]{x^3 - 3x + 2} = \infty.$$

Наклонных асимптот нет.

5<sup>0</sup> Найдем производную:  $y' = \frac{1}{3} \cdot \frac{2x - 3}{\sqrt[3]{(x^2 - 3x + 2)^2}}.$

Решаем неравенства  $y' > 0$  и  $y' < 0$ . Имеем:  $y' > 0$  или  $\frac{1}{3} \cdot \frac{2x - 3}{\sqrt[3]{(x^2 - 3x + 2)^2}},$

откуда  $x > 3/2$ ,  $x \neq 2$ ;  $y' < 0$ , откуда  $x < 3/2$ ,  $x \neq 1$ . Функция монотонно убывает на интервалах  $(-\infty, 1) \cup (1, 3/2)$  и монотонно возрастает на интервалах  $(3/2, 2) \cup (2, +\infty)$ .

Приравнявая производную нулю, найдем критическую точку I рода:  $x = 3/2$ . Кроме того, имеются еще две критические точки I рода:  $x = 1$  и  $x = 2$ . В этих точках производная не существует.

Из схемы (рис. 123, а) следует, что в точке  $x = 3/2$  имеется минимум. Ордината точки минимума  $y_{\min} = -1/\sqrt[3]{4}$ . В точках  $x = 1$  и  $x = 2$  экстремумов нет.

6<sup>0</sup> Находим вторую производную:  $y'' = -\frac{2}{9} \cdot \frac{x^2 - 3x + 3}{(x^2 - 3x + 2)^{5/3}}.$

Решаем неравенства  $y'' > 0$  и  $y'' < 0$ . Имеем:  $y'' > 0$  или  $-\frac{2}{9} \times \frac{x^2 - 3x + 3}{(x^2 - 3x + 2)^{5/3}} > 0$ , откуда  $1 < x < 2$ ;  $y'' < 0$ , откуда  $x < 1$ ,  $x > 2$ .

Вторая производная нигде не обращается в нуль, однако в точках  $x = 1$  и  $x = 2$  она не существует. Эти точки являются критическими точками II рода.

Из схемы (рис. 123, б) следует, что на интервалах  $(-\infty, 1) \cup (2, \infty)$  функция выпукла вверх, а на интервале  $(1, 2)$  — выпукла вниз. В точках  $x = 1$  и  $x = 2$  функция имеет перегибы. Найдем ординаты точек перегиба: если  $x = 1$ , то  $y_{\text{пер}} = 0$ ; если  $x = 2$ , то  $y_{\text{пер}} = 0$ .

График функции изображен на рис. 123, в.

---

12.  $y = e^{\frac{1}{x-1}}$

---

1<sup>0</sup>. Область определения — вся числовая ось, кроме точки  $x = 1$ ,

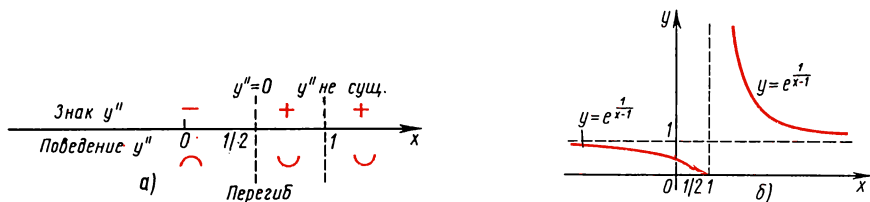


Рис. 124

в которой функция терпит разрыв. Граничные значения функции:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{\frac{1}{x-1}} = 1; \quad \lim_{x \rightarrow 1-0} e^{\frac{1}{x-1}} = 0; \quad \lim_{x \rightarrow 1+0} e^{\frac{1}{x-1}} = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{x-1}} = 1. \quad \text{Отсюда}$$

следует, что  $x = 1$  — вертикальная асимптота.

2<sup>0</sup> Функция общего вида, непериодическая.

3<sup>0</sup> Функция не имеет нулей; она положительна на всей числовой оси, кроме точки  $x = 1$ .

4<sup>0</sup> Найдём параметры наклонной асимптоты:

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{\frac{1}{x-1}}}{x} = 0, \quad b = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{1}{x-1}} = 1.$$

Имеется горизонтальная асимптота  $y = 1$ .

5<sup>0</sup> Найдём производную  $y' = -\frac{1}{(x-1)^2} e^{\frac{1}{x-1}}$ . Производная отрицательна на всей числовой оси, кроме точки  $x = 1$ . Следовательно, функция монотонно убывает всюду, где она определена.

6<sup>0</sup> Находим вторую производную:  $y'' = \frac{2x-1}{(x-4)^4} e^{\frac{1}{x-1}}$

Решаем неравенства  $y'' > 0$  и  $y'' < 0$ . Имеем:  $y'' > 0$ , или  $\frac{2x-1}{(x-4)^4} e^{\frac{1}{x-1}} > 0$ , откуда  $x > 1/2$ ,  $x \neq 1$ ;  $y'' < 0$ , откуда  $x < 1/2$ .

Приравняв вторую производную нулю, найдём критическую точку II рода:  $x = 1/2$ .

Из схемы (рис. 124, а) следует, что на интервалах  $(1/2, 1) \cup (1, +\infty)$  функция выпукла вниз, а на интервале  $(-\infty, 1/2)$  — выпукла вверх. Таким образом, в точке  $x = 1/2$  функция имеет перегиб. Ордината точки перегиба  $y_{\text{пер}} = e^{-2} = 0,135$ .

График функции изображен на рис. 124, б.

$$13. y = \sqrt[3]{(1+x)^2} + \sqrt[3]{(1-x)^2}$$

1<sup>0</sup>. Область определения — вся числовая ось. Точек разрыва нет.

2<sup>0</sup>. Функция четная, непериодическая.

3<sup>0</sup> Функция не имеет нулей; она положительна на всей числовой оси.

4<sup>0</sup> Найдём параметры наклонной асимптоты:

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{(1+x)^2} + \sqrt[3]{(1-x)^2}}{x} = 0; \quad b = \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{(1+x)^2} + \sqrt[3]{(1-x)^2}) = \infty.$$

Асимптот нет.

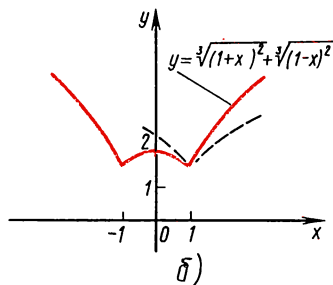
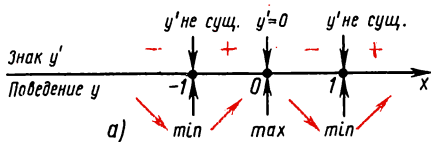


Рис. 125

5<sup>0</sup> Найдем производную:  $y' = \frac{2}{3} \frac{\sqrt[3]{1-x} - \sqrt[3]{1+x}}{\sqrt[3]{1-x^2}}$ .

Приравнявая производную нулю, найдем критическую точку I рода:  $x=0$ . Кроме того, имеются еще две критические точки I рода  $x=1$  и  $x=-1$ . В этих точках производная не существует.

Из схемы (рис. 125, а) следует, что в точке  $x=0$  имеется максимум, а в точках  $x=-1$  и  $x=1$  — минимумы. Ордината максимума  $y_{\max}=2$ , ординаты минимумов  $y_{\min}=\sqrt[3]{2}$ .

6<sup>0</sup> Находим вторую производную:  $y'' = -\frac{2}{9} \left[ \frac{1}{\sqrt[3]{(1+x)^4}} + \frac{1}{\sqrt[3]{(1-x)^4}} \right]$

Вторая производная отрицательна всюду, кроме точек  $x=-1$  и  $x=1$ , где она (как и первая производная) не существует. Поэтому функция выпукла вверх на интервалах  $(-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$ .

График функции изображен на рис. 125, б.

14.  $y = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$ .

1<sup>0</sup> Область определения  $x > 0$ . Граничные значения функции:  $\lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = -\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = 0$ . Итак, имеется вертикальная асимптота  $x=0$ .

2<sup>0</sup> Функция общего вида, непериодическая.

3<sup>0</sup> Нуль функции — точка  $x=1$ . Функция положительна на интервале  $(1, +\infty)$  и отрицательна на интервале  $(0, 1)$ .

4<sup>0</sup> Найдем параметры наклонной асимптоты:

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x\sqrt{x}} = 0, \quad b = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = 0.$$

Существует горизонтальная асимптота  $y=0$ .

5<sup>0</sup> Найдем производную:  $y' = \frac{2 - \ln x}{2x\sqrt{x}}$ .

Из схемы (рис. 126, а) следует, что в точке  $x=e^2=7,389$  имеется максимум. Ордината максимума  $y_{\max}=2e^{-1}=0,735$ .

6<sup>0</sup> Находим вторую производную:  $y'' = \frac{3\ln x - 8}{4x^2\sqrt{x}}$ .

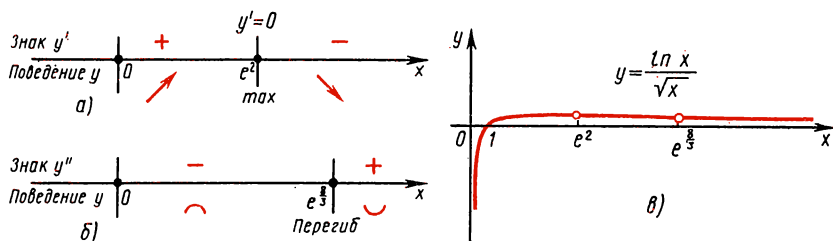


Рис. 126

Из схемы (рис. 126, б) следует, что в точке  $x = e^{8/3} = 14,39$  имеется перегиб. Ордината точки перегиба  $y_{\text{пер}} = 0,702$ .

График функции изображен на рис. 126, в.

15.  $y = |x + 2|e^{-1/x}$ .

1°. Область определения — вся числовая ось, кроме точки  $x = 0$ . Граничные значения функции:  $\lim_{x \rightarrow -\infty} |x + 2|e^{-1/x} = +\infty$ ;  $\lim_{x \rightarrow 0-0} |x + 2|e^{-1/x} = +\infty$ ;  $\lim_{x \rightarrow 0+0} |x + 2|e^{-1/x} = 0$ ;  $\lim_{x \rightarrow +\infty} |x + 2|e^{-1/x} = +\infty$ . Таким образом,  $x = 0$  — вертикальная асимптота.

2°. Функция общего вида, непериодическая.

3°. Нуль функции — точка  $x = -2$ .

Заметим, что если  $x \approx -2$ , то  $|x + 2|e^{-1/x} \approx |x + 2|e^{1/2}$ . Отсюда следует, что в точке  $x = -2$  имеется минимум, аналогичный минимуму функции  $y = |x|$ , график которой смещен на 2 единицы влево по отношению к искомому графику.

4°. Найдем параметры наклонной асимптоты:

$$\begin{aligned} k_1 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x + 2|e^{-1/x}}{x} = -1, \quad b_1 = \lim_{x \rightarrow -\infty} (|x + 2|e^{-1/x} + x) = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( (-x - 2) \left( 1 - \frac{1}{x} + \dots \right) + x \right) = -1; \\ k_2 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|x + 2|e^{-1/x}}{x} = 1; \quad b_2 = \lim_{x \rightarrow +\infty} (|x + 2|e^{-1/x} - x) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( (x + 2) \left( 1 - \frac{1}{x} + \dots \right) - x \right) = 1. \end{aligned}$$

Таким образом, существуют две наклонные асимптоты  $y = -x - 1$ ,  $y = x + 1$ .

5°. Найдем производную:

$$y' = \begin{cases} -\frac{x^2 + x + 2}{x^2} e^{-1/x} & \text{при } x < -2; \\ \frac{x^2 + x + 2}{x^2} e^{-1/x} & \text{при } -2 < x < 0; \quad 0 < x < \infty. \end{cases}$$

Из схемы (рис. 127, а) следует, что в точке  $x = -2$  имеется минимум. Ордината минимума  $y_{\text{min}} = 0$ .

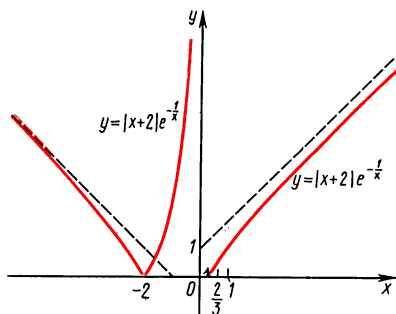
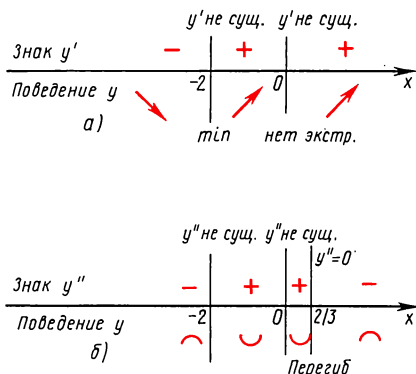


Рис. 127

6<sup>0</sup> Находим вторую производную:

$$y'' = \begin{cases} -\frac{2-3x}{x^4} e^{-1/x} & \text{при } x < -2; \\ \frac{2-3x}{x^4} e^{-1/x} & \text{при } -2 < x < 0; \quad 0 < x < \infty. \end{cases}$$

Из схемы (рис. 127, б) следует, что в точке  $x = 2/3$  функция имеет перегиб. Ордината точки перегиба  $y_{\text{пер}} = 0,595$ .

График функции изображен на рис. 127, в.

## 16. $y = x^x$

Предварительно преобразуем функцию:  $y = x^x = e^{x \ln x}$

1<sup>0</sup> Область определения  $x > 0$ . Граничные значения:  $\lim_{x \rightarrow 0+0} e^{x \ln x} = 1$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x \ln x} = +\infty$ . Точек разрыва нет.

2<sup>0</sup> Функция общего вида, неперiodическая.

3<sup>0</sup> Функция не имеет нулей.

4<sup>0</sup> Найдем параметры наклонной асимптоты:  $k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x \ln x}}{x} = +\infty$ .

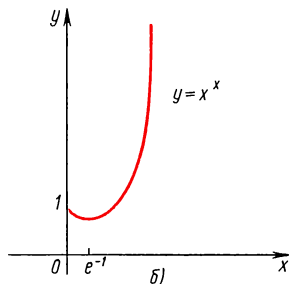
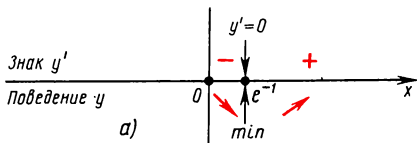


Рис. 128

Наклонных асимптот нет.

5° Найдем производную:  $y' = x^x(\ln x + 1)$ .

Из схемы (рис. 128, а) следует, что в точке  $x = e^{-1} \approx 0,367$  функция имеет минимум. Ордината минимума  $y_{\min} = 0,692$ .

6° Найдем вторую производную:  $y'' = x^x \left[ (\ln x + 1)^2 + \frac{1}{x} \right]$ . Вторая производная положительна на интервале  $(0, +\infty)$  и, значит, функция выпукла вниз.

Уточним теперь поведение функции вблизи точки  $x=0$ . Вычислим  $\lim_{x \rightarrow 0+0} y' = \lim_{x \rightarrow 0+0} [x^x(\ln x + 1)] = -\infty$ . Отсюда следует, что искомый график касается оси  $y$  в точке  $M_0(0; 1)$ .

График функции изображен на рис. 128, б.

## Раздел V

### ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ФУНКЦИИ

(продолжение)

---

1. Гиперболический синус  $y = \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$  (рис. 129).

---

Функция нечетная, монотонно возрастающая. Начало координат является точкой перегиба. Угол наклона  $\varphi$  касательной в начале координат равен  $\pi/4$ . Действительно,  $y' = \operatorname{tg} \varphi = \operatorname{ch} x|_{x=0} = 1$ .

---

2. Гиперболический косинус  $y = \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$  (рис. 130).

---

Функция четная, при  $x=0$  имеет минимум, равный 1. Обоб-

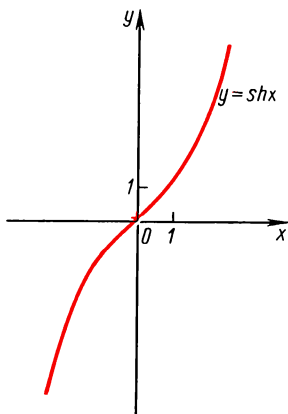


Рис. 129

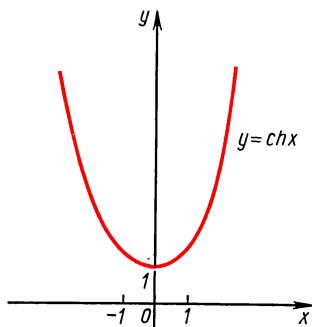


Рис. 130



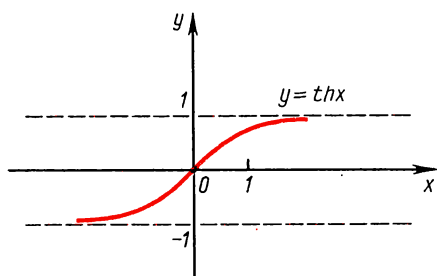


Рис. 131.

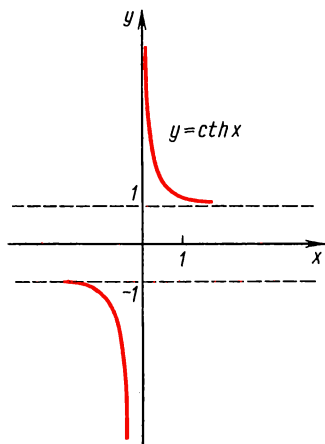


Рис. 132

щением гиперболического косинуса является так называемая *цепная линия*:  $y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$ ,  $a > 0$ . Форму данной линии принимает гибкая тяжелая нерастяжимая нить, подвешенная в двух точках.

3. Гиперболический тангенс  $y = \operatorname{th} x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$  (рис. 131).

Функция нечетная, монотонно возрастающая. Прямые  $y = \pm 1$  служат горизонтальными асимптотами. Начало координат является точкой перегиба.

4. Гиперболический котангенс  $y = \operatorname{cth} x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$  (рис. 132).

Функция нечетная, нулей не имеет. Прямые  $y = \pm 1$  являются горизонтальными асимптотами, прямая  $x = 0$  — вертикальной асимптотой.

5. Аркасинус  $y = \operatorname{Arsh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$  (рис. 133).

Эта функция является обратной функцией для  $y = \operatorname{sh} x$  на интервале  $(-\infty, +\infty)$ . Функция нечетная, монотонно возрастающая, начало координат служит точкой перегиба. График функции получается зеркальным отражением графика  $y = \operatorname{sh} x$  относительно биссектрисы I и III координатных углов, т. е. относительно прямой  $y = x$ .

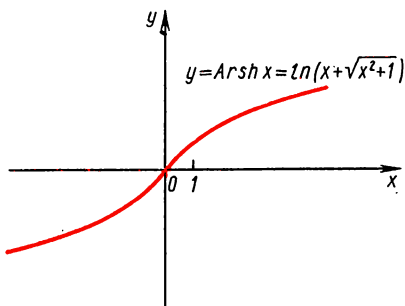


Рис. 133

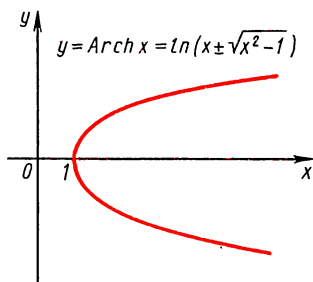


Рис. 134

---

**6. Аркакосинус**  $y = \text{Arch } x = \ln(x \pm \sqrt{x^2 - 1})$  (рис. 134).

---

Это двузначная функция, которая распадается на две однозначные ветви, отвечающие порознь изменению  $y$  от 0 до  $+\infty$  и от  $-\infty$  до 0. Она является обратной функцией для  $y = \text{ch } x$  в промежутке  $(0, +\infty)$  и в промежутке  $(-\infty, 0)$ . График функции получается зеркальным отражением графика  $y = \text{ch } x$  относительно прямой  $y = x$ .

---

**7. Аретангенс**  $y = \text{Arth } x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$  (рис. 135).

---

Функция нечетная, монотонно возрастающая. Начало координат является точкой перегиба. Область определения функции — интервал  $(-1, 1)$ , область значений — интервал  $(-\infty, +\infty)$ . Имеются две вертикальные асимптоты:  $x \pm 1$ . Эта функция является обратной функцией для  $y = \text{th } x$ .

---

**8. Аркакотангенс**  $y = \text{Arcth } x = \frac{1}{2} \ln \frac{x+1}{x-1}$  (рис. 136).

---

Функция нечетная, область определения —  $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ .

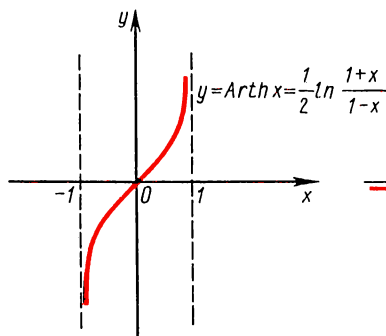


Рис. 135

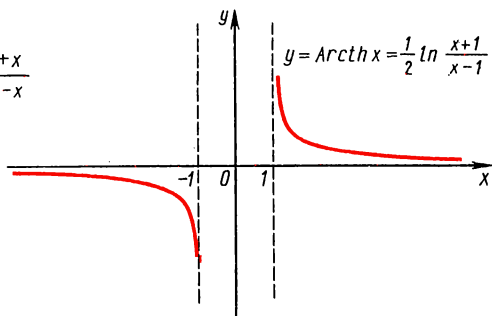


Рис. 136

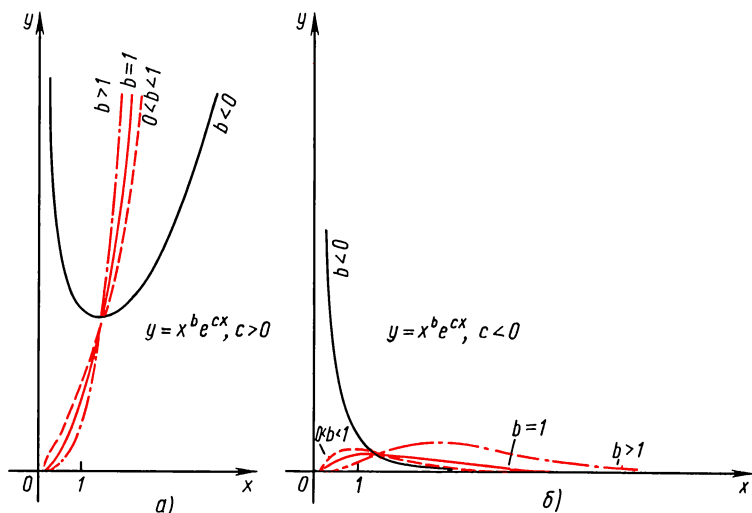


Рис. 137

Она является обратной функцией для  $y = \text{cth} x$  в обоих интервалах монотонности. Ее график получается зеркальным отражением графика  $y = \text{cth} x$  относительно прямой  $y = x$ . Имеются асимптоты  $y = 0$ ,  $x = \pm 1$ .

**9. Функция вида  $y = x^b e^{cx}$  ( $bc \neq 0$ ,  $b$  — любое отличное от нуля действительное число).**

При  $b > c$  функции определены на полуинтервале  $[0, +\infty)$ , а при  $b < c$  — на интервале  $(0, +\infty)$ . Семейство графиков при  $c > 0$  и различных  $b$  изображено на рис. 137, а, а при  $c < 0$  и различных  $b$  — на рис. 137, б. Все графики резко меняют характер своего поведения в окрестности точки  $x = 0$ , когда параметр  $b$  изменяет знак.

**10. Функция вида  $y = Ae^{-kx} \sin(\omega x + \alpha)$ .**

Графики этих функций при  $x \geq 0$  представляют собой затухающие гармонические колебания (рис. 138). Кривая расположена между двумя показательными кривыми  $y = Ae^{-kx}$  и  $y = -Ae^{-kx}$ , касаясь их в тех точках, для которых  $\sin(\omega x + \alpha) = 1$ . Кривая пересекает ось абсцисс в бесконечном числе точек, причем расстояние между двумя соседними точками является величиной постоянной, равной  $\pi/\omega$ . Полагая  $\cos \varphi = \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 + k^2}}$ ;  $\sin \varphi = \frac{k}{\sqrt{\omega^2 + k^2}}$ , найдем аб-

сциссы точек экстремума  $x_n = \left[ (2n + 1) \frac{\pi}{2} - \alpha - \varphi \right] \frac{1}{\omega}$  и абсциссы точек перегиба  $x_m = \left[ \pi k n - \alpha - 2\varphi \right] \frac{1}{\omega}$ .

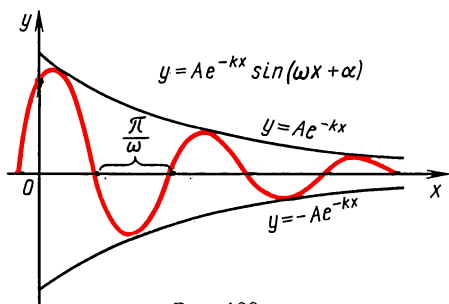


Рис. 138

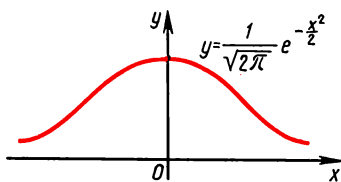


Рис. 139

11. Кривая Гаусса  $y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$  (рис. 139).

График симметричен относительно оси  $y$ . При  $x=0$  достигается максимум, равный  $1/\sqrt{2\pi} \approx 0,399$ . При  $x=\pm 1$  имеются две точки перегиба, ординаты которых  $y_{\text{пер}} = 1/\sqrt{2\pi e} \approx 0,24$ . При  $x \rightarrow \pm \infty$  кривая асимптотически приближается к оси  $x$ , причем приближение происходит очень быстро (например, если  $x=3$ , то  $y=0,0044$ ; если  $x=4$ , то  $y=0,00013$ ).

12. Некоторые специальные тригонометрические функции.

$y = x \operatorname{tg} x$  (рис. 140). График симметричен относительно оси ординат. В начале координат имеется минимум. Нулями функции явля-

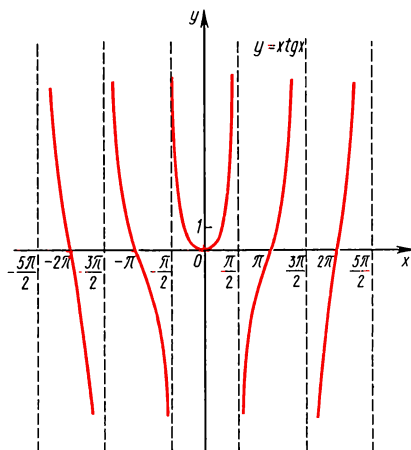


Рис. 140

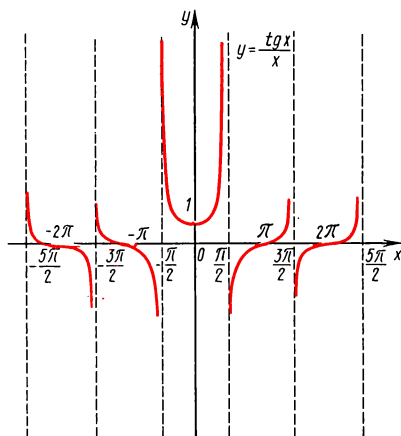


Рис. 141

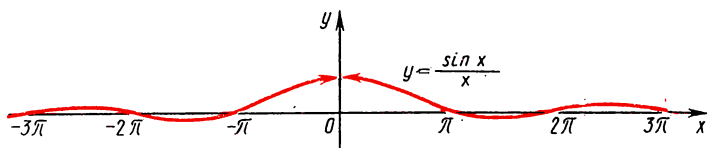


Рис. 142

ются точки  $x_n = \pi n$  ( $n = \pm 1, \pm 2, \dots$ ). Существуют вертикальные асимптоты  $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$ .

$y = \frac{\operatorname{tg} x}{x}$  (рис. 141). Функция четная. При  $x=0$  имеется минимум, равный 1. Нули функции — точки  $x_n = \pi n$  ( $n = \pm 1, \pm 2, \dots$ ). Имеются вертикальные асимптоты  $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$ .

$y = \frac{\sin x}{x}$  (рис. 142). График симметричен относительно оси  $y$ . При  $x=0$  имеется максимум, равный 1. Нули функции — точки  $x = \pi n$  ( $n = \pm 1, \pm 2, \dots$ ). При  $x \rightarrow \pm \infty$  график асимптотически приближается к оси  $x$ . Абсциссы экстремумов находятся из решения уравнения  $\frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$ , что можно сделать, например, графически (см. рис. 141) или с помощью компьютера.

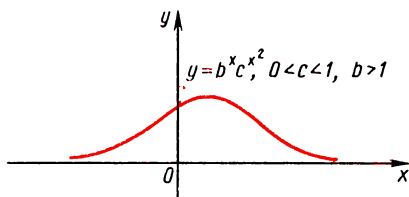
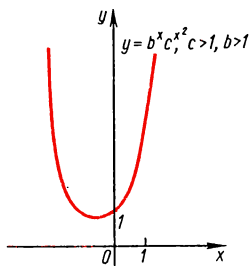


Рис. 143

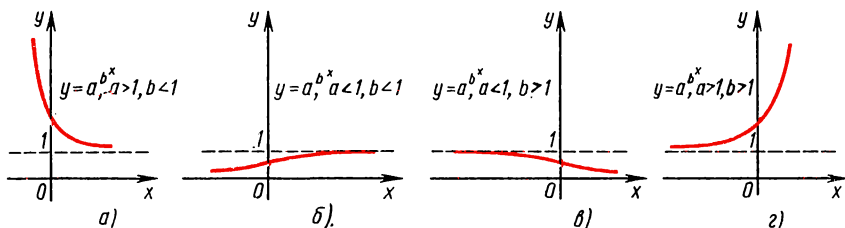


Рис. 144

### 13. Кривые роста..

Так называют кривые, описывающие закономерности развития явлений во времени. Аналитическое выравнивание динамического ряда с помощью тех или иных функций (т. е. их подгонка к данным функциям) в большинстве случаев оказывается удобным средством описания эмпирических данных.

Рассмотрим некоторые кривые роста.

*Логарифмическая парабола*

$y = b^x c^{x^2}$  ( $b > 0$ ,  $c > 0$ ) (рис. 143).

Запишем ее уравнение в виде

$y = e^{x \ln b + x^2 \ln c}$ . Если  $c > 1$ , то вет-

ви параболы  $x \ln b + x^2 \ln c$  на-

правлены вверх и при  $x \rightarrow \pm \infty$

имеем  $y = b^x c^{x^2} \rightarrow +\infty$ . Если

$0 < c < 1$ , то ветви параболы  $x \ln b +$

$+ x^2 \ln c$  направлены вниз и при

$x \rightarrow \pm \infty$  получим  $y = b^x c^{x^2} \rightarrow 0$ . При

$c > 1$  и  $b > 1$  кривая смещена влево,

а при  $c < b < 1$  — вправо.

*Кривая Гомперца*  $y = a^{b^x} =$

$= e^{b^x \ln a}$ . Если  $\ln a > 0$  и  $0 < b < 1$ , то при  $x \rightarrow \infty$  имеем  $y \rightarrow 1$ , а при  $x \rightarrow$

$-\infty$  получим  $y \rightarrow +\infty$  (рис. 144, а). Если  $\ln a < 0$  и  $0 < b < 1$ , то

при  $x \rightarrow +\infty$  имеем  $y \rightarrow 1$ , а при  $x \rightarrow -\infty$  получим  $y \rightarrow 0$ . В этом случае

имеется точка перегиба (рис. 144, б). Аналогично рассматриваются

еще два случая (рис. 144, в и г).

*Логарифмическая кривая*  $y = \frac{k}{1 + be^{-ax}}$  (рис. 145). Если  $a > 0$  и

$x \rightarrow +\infty$ , то  $y \rightarrow k$ , а если  $x \rightarrow -\infty$ , то  $y \rightarrow 0$  при  $x = \frac{\ln b}{a}$  имеется точка перегиба.

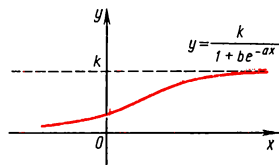


Рис. 145

## Раздел VI

### ПРОСТЕЙШИЕ НЕЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ФУНКЦИИ

#### § 1. Ступенчатые функции

Функция  $\varphi(x)$ , определенная в интервале  $(a, b)$ , называется *ступенчатой*, если этот интервал можно разбить на конечное число частей (интервалов постоянства), в каждом из которых  $\varphi(x)$  принимает постоянное значение.

Значения функции в точках разрыва могут быть как определены, так и не определены. Рассмотрим наиболее часто применяемые ступенчатые функции:

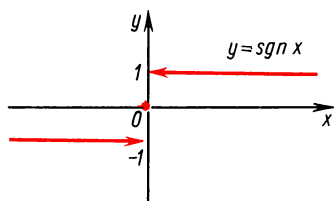


Рис. 146

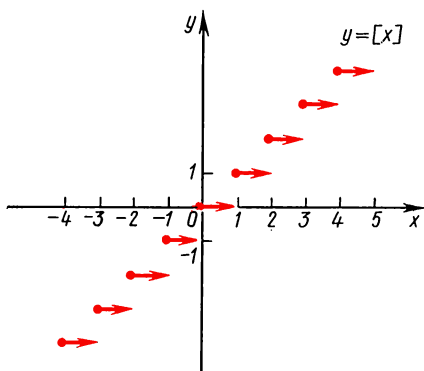


Рис. 147

---

1. Сигнум\*  $x$  (рис. 146):

---

$$y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1 & \text{при } x < 0, \\ 0 & \text{при } x = 0, \\ 1 & \text{при } x > 0. \end{cases}$$


---

2. Целая часть числа  $x$ :  $y = [x]$  (рис. 147).

---

Если  $x = n + r$ , где  $n$  — целое число и  $0 \leq r < 1$ , то  $[x] = n$  (т. е.  $y$  равно наибольшему целому числу, не превосходящему  $x$ ).

---

3. Единичная функция Хевисайда (рис. 148):

---

$$y = \eta(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } t > 0, \\ 0 & \text{при } t < 0. \end{cases}$$


---

4. Функция вида

$$y = A\{\eta(t) + \eta(t - \tau) + \eta(t - 2\tau) + \dots\}.$$


---

Здесь  $A = \text{const}$ , а

$$\eta(t - \tau) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < \tau, \\ 1 & \text{при } t > \tau. \end{cases}$$

Построение графика этой функции удобно проводить следующим образом. Сначала рассматривают график суммы первых двух слагаемых:

$$\eta(t) + \eta(t - \tau) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0; \\ 1 & \text{при } 0 \leq t < \tau; \\ 2 & \text{при } \tau \leq t < 2\tau; \end{cases}$$

---

\* От лат. signum — «знак».

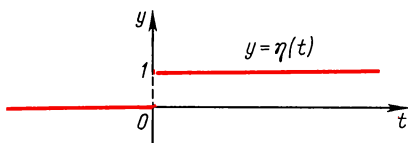


Рис. 148

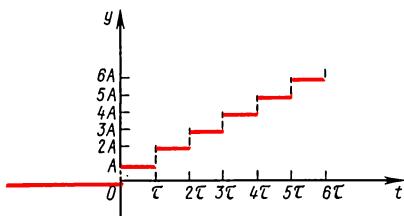


Рис. 149

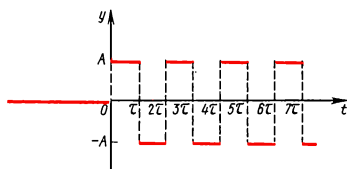


Рис. 150

затем — трех слагаемых:

$$\eta(t) + \eta(t-\tau) + \eta(t-2\tau) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0; \\ 1 & \text{при } 0 < t < \tau, \\ 2 & \text{при } \tau < t < 2\tau, \\ 3 & \text{при } 2\tau < t < 3\tau \end{cases}$$

и т. д.

График функции изображен на рис. 149.

5. Периодически повторяющийся прямоугольный импульс (рис. 150):

$$y = A\{\eta(t) - 2\eta(t-\tau) + 2\eta(t-2\tau) - \dots\}.$$

6. Последовательность «П-образных» импульсов (рис. 151):

$$y = A\{\eta(t) - \eta(t-\tau) + \eta(t-T) - \eta(t-T-\tau) + \eta(t-2T) - \dots\}.$$

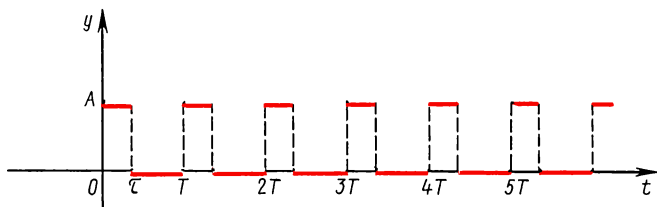


Рис. 151



## § 2. Кусочно-непрерывные функции

*Кусочно-непрерывной функцией* действительной переменной  $x$  (или  $t$ ) называется такая функция, которая в любом конечном интервале имеет конечное число точек разрыва I рода. Ступенчатые функции представляют собой частный случай кусочно-непрерывных

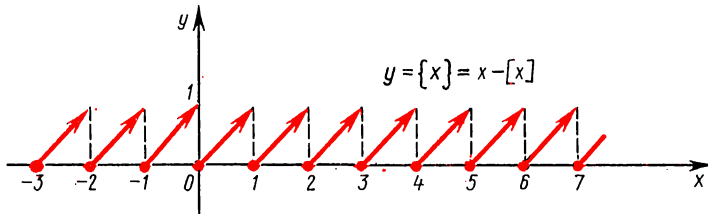


Рис. 152

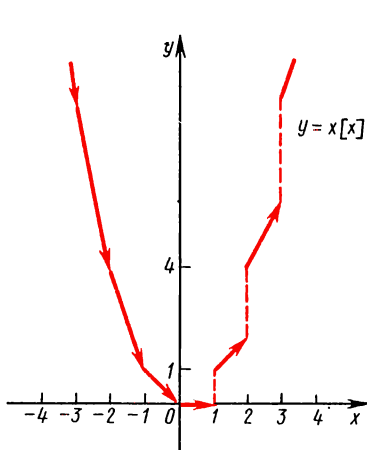


Рис. 153

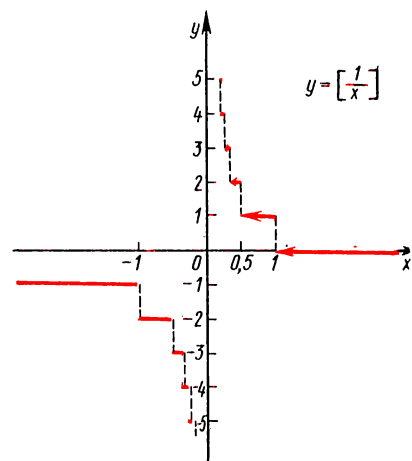


Рис. 154

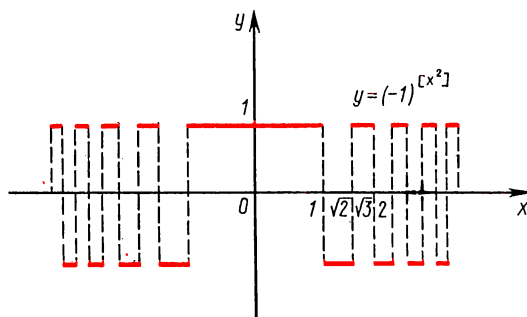


Рис. 155

функций. В этом параграфе мы рассмотрим кусочно-непрерывные функции, не являющиеся ступенчатыми.

1. Дробная часть  $x$ :  
 $y = \{x\} = x - [x]$  (рис. 152).

2.  $y = x[x]$  (рис. 153).

3.  $y = \left[\frac{1}{x}\right]$  (рис. 154).

4.  $y = (-1)^{[x^2]}$  (рис. 155).

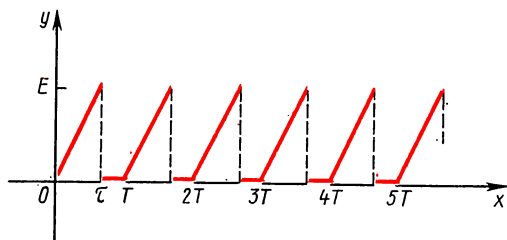


Рис. 156

5. Пилообразная функция:

$$y = E\{t - t\eta(t - \tau) + (t - T)\eta(t - T) - (t - T)\eta(t - T - \tau) + (t - 2T)\eta(t - 2T - \tau) - \dots\}.$$

Здесь  $E = \text{const}$ ,  $T > \tau$ .

Построение графика пилообразной функции проводят в такой последовательности. Сначала рассматривают функцию

$$E\{t - t\eta(t - \tau)\} = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0, \\ Et & \text{при } 0 \leq t < \tau, \\ 0 & \text{при } t \geq \tau. \end{cases}$$

При этом

$$t\eta(t - \tau) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < \tau, \\ t & \text{при } t \geq \tau. \end{cases}$$

Затем рассматривают функцию

$$E\{t - t\eta(t - \tau) + (t - T)\eta(t - T)\} = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0, \\ Et & \text{при } 0 \leq t < \tau, \\ 0 & \text{при } \tau \leq t < T, \\ E(t - T) & \text{при } t \geq T \end{cases}$$

и т. д.

График функции изображен на рис. 156.

### § 3. Графики функций, заданных с помощью пределов

В этом случае необходимо предварительно вычислить соответствующие пределы, после чего можно приступить к построению самих графиков функций.

**Примеры.** 1.  $y = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - x)^{2n}$ ,  $|x| \leq 1$ .

Отметим прежде всего, что если  $|x| = 1$ , то  $y = 0$ , а если  $x = 0$ , то  $y = 1$ . Далее, если  $|x| < 1$ , то  $|x|^n \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$  и, таким образом,  $y = 1$ . Итак, функция разрывна в точках  $x = -1$ ,  $x = 1$ .

График функции изображен на рис. 157.

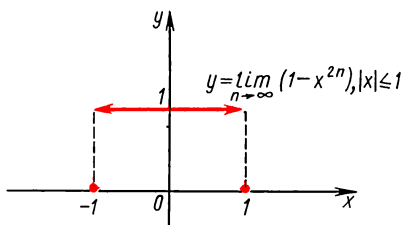


Рис. 157

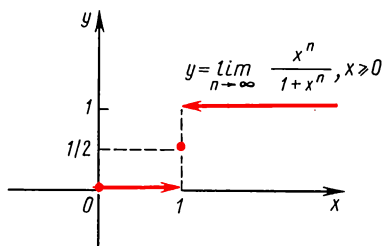


Рис. 158

---


$$2. y = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n}{1 + x^n}, \quad x \geq 0.$$


---

Если  $x=0$ , то  $y=0$ , а если  $x=1$ , то  $y=1/2$ . Далее, если  $0 < x < 1$ , то  $x^n \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$  и, значит,  $y=0$ . Наконец, если  $x > 1$ , то  $x^n \rightarrow \infty$  при  $n \rightarrow \infty$  и, следовательно,  $y=1$ . Функция разрывна в точке  $x=1$ .

График функции изображен на рис. 158.

---


$$3. y = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + x^n}, \quad x \geq 0.$$


---

Если  $x=0$ , то  $y=1$ . Далее, если  $0 < x < 1$ , то  $x^n \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$  и поэтому  $y=1$ . Если же  $x > 1$ , то  $x^n \rightarrow \infty$  при  $n \rightarrow \infty$  и, значит,  $y=0$ . Наконец, если  $x=1$ , то  $y=1/2$ . Итак,

$$y = \begin{cases} 1 & \text{при } 0 \leq x < 1, \\ 1/2 & \text{при } x = 1, \\ 0 & \text{при } x > 1. \end{cases}$$

График функции изображен на рис. 159.

---


$$4. y = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n - x^{-n}}{x^n + x^{-n}}, \quad x \neq 0.$$


---

Заметим, что так как  $x \neq 0$ , то  $y = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2n} - 1}{x^{2n} + 1}$ . Отсюда сразу следует, что если  $|x|=1$ , то  $y=0$ . Если же  $0 < |x| < 1$ , то  $x^{2n} \rightarrow 0$  и  $y \rightarrow -1$ .

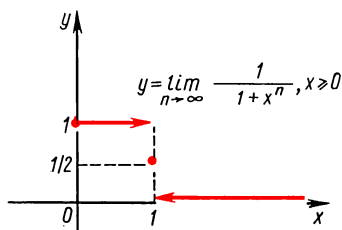


Рис. 159

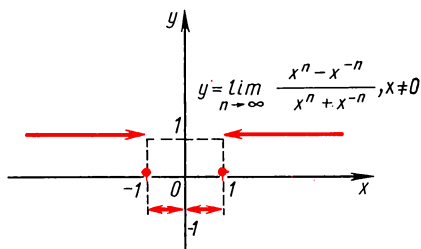


Рис. 160

Наконец, если  $|x| > 1$ , то  $x^{2n} \rightarrow \infty$  и  $y \rightarrow 1$ . Итак, функция разрывна в точках  $x = \pm 1$  и  $x = 0$ .

В точке  $x = 0$  можно доопределить функцию по непрерывности так:

$$y = \begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n - x^{-n}}{x^n + x^{-n}} & \text{при } x \neq 0, \\ -1 & \text{при } x = 0. \end{cases}$$

График функции изображен на рис. 160.

$$5. y = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^x - n^{-x}}{n^x + n^{-x}}.$$

Если  $x = 0$ , то  $y = 0$ . Далее, если  $x > 0$ , то  $n^{-x} \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$  и, значит,  $y = 1$ . Наконец, если  $x < 0$ , то  $n^x \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$  и, следовательно,  $y = -1$ : Итак,

$$y = \begin{cases} 1 & \text{при } x > 0, \\ 0 & \text{при } x = 0, \\ -1 & \text{при } x < 0. \end{cases}$$

Заметим, что  $y = \operatorname{sgn} x$ .

График функции изображен на рис. 161.

$$6. y = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1 + x^n}, \quad x \geq 0.$$

Отметим сначала, что при  $x = 0$  и  $x = 1$  получим  $y = 1$ . Кроме того, если  $0 < x < 1$ , то  $x^n \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$  и, значит,  $y = 1$ . Наконец, если  $x > 1$ , то  $x^n \rightarrow \infty$ , откуда  $y = x$ .

Более строгое вычисление предела дает тот же результат:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + x^n)^{1/n} &= x \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x^n}\right)^{1/n} = \\ &= x \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{nx^n} + \dots\right) = x. \end{aligned}$$

График функции изображен на рис. 162.

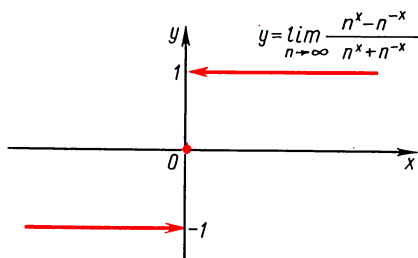


Рис. 161

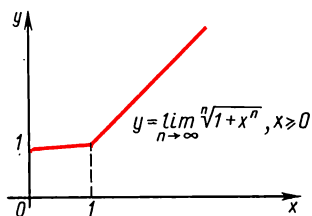


Рис. 162

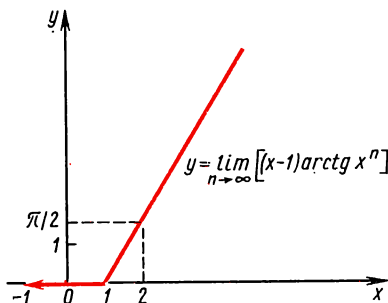


Рис. 163

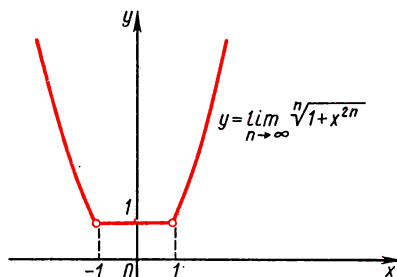


Рис. 164

---


$$7. y = \lim_{n \rightarrow \infty} [(x-1) \operatorname{arctg} x^n].$$


---

Отметим, что если  $x=0$ , то  $y=0$  и если  $|x|<1$ , то также  $y=0$ , так как  $x^n \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ . Однако при  $x \leq -1$  функция не существует, поскольку в этом случае не существует предел  $x^n$  при  $n \rightarrow \infty$ . Если же  $x > 1$ , то  $x^n \rightarrow \infty$  при  $n \rightarrow \infty$  и, значит,  $y = \frac{\pi}{2}(x-1)$ . Наконец, если  $x=1$ , то  $y=0$ .

Итак,

$$y = \begin{cases} 0 & \text{при } -1 < x < 1, \\ \frac{\pi}{2}(x-1) & \text{при } x \geq 1. \end{cases}$$

График функции изображен на рис. 163.

---

$$8. y = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1+x^{2n}}$$


---

Если  $|x| \leq 1$ , то  $y=1$ , так как  $x^{2n} \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$  и  $-1 < x < 1$ , а при  $|x|=1$  также  $y=1$ . Если же  $|x| > 1$ , то  $x^{2n} \rightarrow \infty$  при  $n \rightarrow \infty$  и, значит,  $y=x^2$ .

Таким образом,

$$y = \begin{cases} 1 & \text{при } |x| \leq 1, \\ x^2 & \text{при } |x| > 1. \end{cases}$$

График функции изображен на рис. 164.

---

$$9. y = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1+e^{n(x+1)}}.$$


---

Если  $x+1 > 0$ , то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1+e^{n(x+1)})^{1/n} = e^{x+1} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{e^{n(x+1)}}\right)^{1/n} = e^{x+1}$$

Если же  $x+1 < 0$ , то  $y=1$ , так как  $e^{n(x+1)} \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ . Наконец, если  $x+1=0$ , то  $y=1$ .

Таким образом,

$$y = \begin{cases} 1 & \text{при } x \leq -1, \\ e^{x+1} & \text{при } x > -1. \end{cases}$$

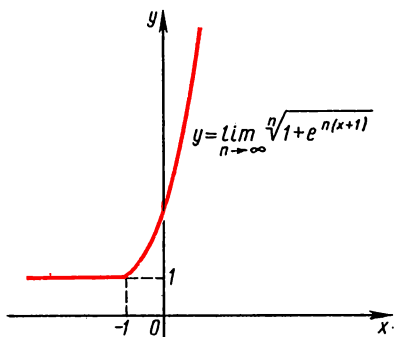


Рис. 165

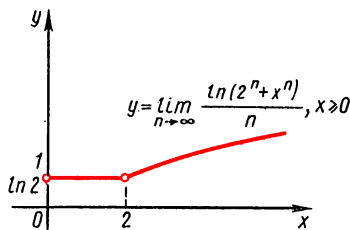


Рис. 166

График функции изображен на рис. 165.

---

10.  $y = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(2^n + x^n)}{n}, \quad x \geq 0.$

---

При  $x=0$  и  $x=1$  получим  $y = \ln 2$ . Далее, если  $0 < x < 1$ , то  $y = \ln 2$ , а если  $1 < x < 2$ , то

$$y = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(2^n + x^n)}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \ln 2 + \ln\left(1 + \left(\frac{x}{2}\right)^n\right)}{n} = \ln 2.$$

Наконец, если  $x=2$ , то  $y = \ln 2$ , а если  $x > 2$ , то  $y = \ln x$ .

Таким образом,

$$y = \begin{cases} \ln 2 & \text{при } 0 \leq x \leq 2, \\ \ln x & \text{при } x > 2. \end{cases}$$

График функции изображен на рис. 166.

---

11.  $y = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1 + x^n + \left(\frac{x^2}{2}\right)^n}, \quad x \geq 0.$

---

При  $x=0$  и  $x=1$  получим  $y=1$ . Если  $0 < x < 1$ , то  $x^n \rightarrow 0$  и  $(x^2/2)^n \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$  и, следовательно,  $y=1$ . Если же  $1 < x < 2$ , то  $x > x^2/2$ ; поэтому

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[ 1 + x^n + \left(\frac{x^2}{2}\right)^n \right]^{1/n} = x \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ 1 + \frac{1}{x^n} + \left(\frac{x}{2}\right)^n \right]^{1/n} = x.$$

Далее, если  $x > 2$ , то  $x < x^2/2$ , откуда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[ 1 + x^n + \left(\frac{x^2}{2}\right)^n \right]^{1/n} = \frac{x^2}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ 1 + \frac{1}{(2x)^n} + \left(\frac{2}{x^2}\right)^n \right]^{1/n} = \frac{x^2}{2}.$$

Наконец, при  $x=2$  имеем  $y=2$ .

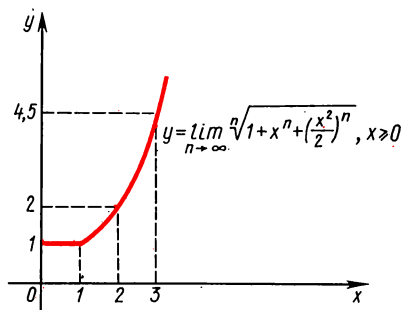


Рис. 167

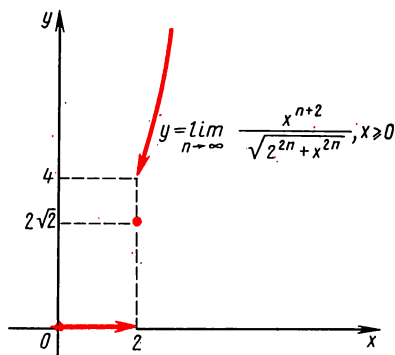


Рис. 168

Таким образом,

$$y = \begin{cases} 1 & \text{при } 0 \leq x \leq 1, \\ x & \text{при } 1 < x \leq 2, \\ x^2/2 & \text{при } x \geq 2. \end{cases}$$

График функции изображен на рис. 167.

$$12. y = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{n+2}}{\sqrt{2^{2n} + x^{2n}}}, \quad x \geq 0.$$

При  $x=0$  и  $x=1$  находим  $y=0$ . Далее, если  $0 < x < 1$ , то в силу того, что  $x^{n+2} \rightarrow 0$  и  $x^{2n} \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ , получим  $y=0$ . Кроме того, при  $1 < x < 2$  имеем

$$y = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{n+2}}{\sqrt{2^{2n} + x^{2n}}} = x^2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n}{2^n \left(1 + \left(\frac{x}{2}\right)^{2n}\right)^{1/2}} = 0.$$

Если  $x=2$ , то  $y=\sqrt{2}$ . Наконец, при  $x > 2$  получим

$$y = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{n+2}}{\sqrt{2^{2n} + x^{2n}}} = x^2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1 + \left(\frac{2}{x}\right)^{2n}\right)^{1/2}} = x^2.$$

Таким образом,

$$y = \begin{cases} 0 & \text{при } 0 \leq x < 2, \\ 2\sqrt{2} & \text{при } x=2, \\ x^2 & \text{при } x > 2. \end{cases}$$

Функция разрывна в точке  $x=2$ . График функции изображен на рис. 168.

$$13. y = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin^{2n} x.$$

Если  $|\sin x| < 1$ , то  $\sin^{2n} x \rightarrow 0$ , при  $n \rightarrow \infty$  и, значит,  $y=0$ . Если же  $|\sin x|=1$ , то  $y=1$ . Таким образом,

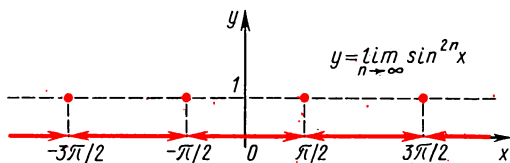


Рис. 169

$$y = \begin{cases} 0 & \text{при } x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, \\ 1 & \text{при } x = \frac{\pi}{2} + \pi k; \quad k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

График функции изображен на рис. 169.

14.  $y = \lim_{n \rightarrow \infty} \cos^{2n} x.$

Проведя аналогичные рассуждения, получим

$$y = \begin{cases} 0 & \text{при } x \neq \pi k, \\ 1 & \text{при } x = \pi k; \quad k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

График функции изображен на рис. 170.

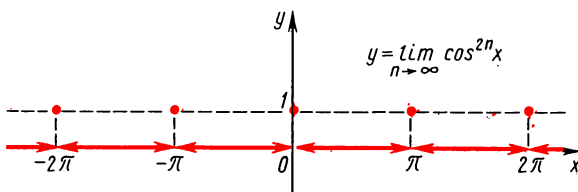


Рис. 170

15.  $y = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x}{1 + (2 \sin x)^{2n}}.$

Отметим сразу, что если  $2 \sin x = \pm 1$ , т. е.  $\sin x = \pm 1/2$  или  $x = \pm \pi/6 + \pi k$ , то  $y = x/2$ . Если же  $|2 \sin x| < 1$ , т. е.  $|\sin x| < 1/2$ , то  $(2 \sin x)^{2n} \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ , откуда  $y = x$  в интервалах  $(-\pi/6 + \pi k, \pi/6 + \pi k)$ . Наконец, если  $|2 \sin x| > 1$ , т. е. если  $|\sin x| > 1/2$ , то  $(2 \sin x)^{2n} \rightarrow \infty$  при  $n \rightarrow \infty$ , откуда  $y = 0$  в интервалах  $(\pi/6 + \pi k, 5\pi/6 + \pi k)$ .

Таким образом,

$$y = \begin{cases} 0 & \text{при } \pi/6 + \pi k < x < 5\pi/6 + \pi k, \\ x/2 & \text{при } x = \pm \pi/6 + \pi k, \\ x & \text{при } -\pi/6 + \pi k < x < \pi/6 + \pi k; \quad k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Заметим, что данная функция является нечетной. Ее график изображен на рис. 171.



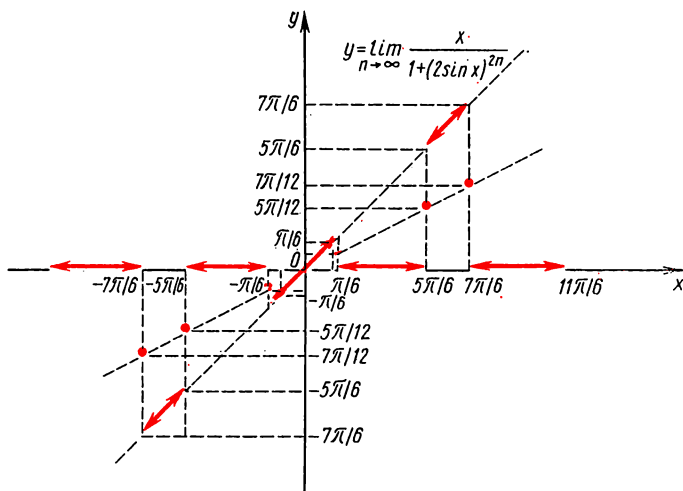


Рис. 171

16.  $y = \lim_{n \rightarrow \infty} [x \operatorname{arctg}(n \operatorname{ctg} x)].$

Если  $\operatorname{ctg} x = 0$ , то  $y = 0$ . Если же  $\operatorname{ctg} x > 0$ , то  $y = (\pi/2)x$ , а если  $\operatorname{ctg} x < 0$ , то  $y = -(\pi/2)x$ . Таким образом,

$$y = \begin{cases} 0 & \text{при } x = \pm\pi/2 + \pi k; \\ (\pi/2)x & \text{при } \pi k < x < \pi/2 + \pi k; \\ -(\pi/2)x & \text{при } \pi/2 + \pi k < x < \pi + \pi k; \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Функция является четной. Ее график изображен на рис. 172.

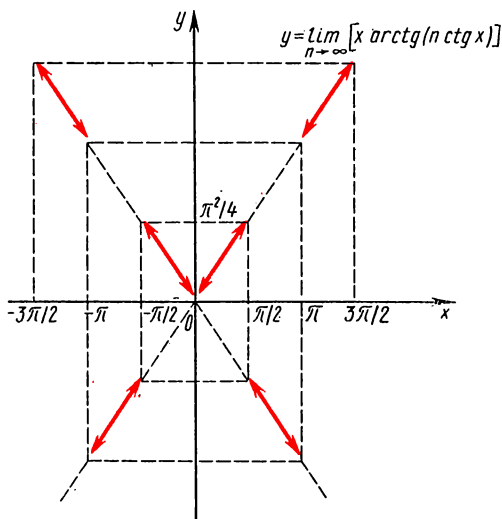


Рис. 172

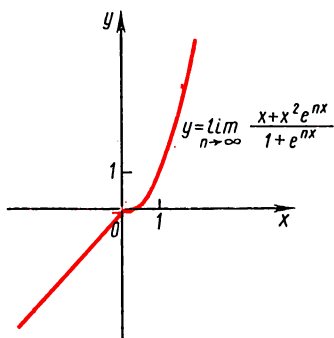


Рис. 173

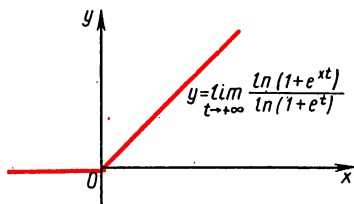


Рис. 174

---


$$17. y = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x + x^2 e^{nx}}{1 + e^{nx}}.$$


---

Очевидно, что если  $x=0$ , то  $y=0$ . Далее, если  $x>0$ , то  $e^{nx} \rightarrow \infty$  при  $n \rightarrow \infty$  и, значит,  $y=x^2$ . Наконец, если  $x<0$ , то  $e^{nx} \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$  и, следовательно,  $y=x$ . Итак,

$$y = \begin{cases} x^2 & \text{при } x > 0, \\ 0 & \text{при } x = 0, \\ x & \text{при } x < 0. \end{cases}$$

График функции изображен на рис. 173.

---


$$18. y = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1 + e^{xt})}{\ln(1 + e^t)}.$$


---

Если  $x=0$ , то  $y=0$ . Если же  $x<0$ , то  $e^{xt} \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$  и, значит,  $y=0$ . Далее, если  $0 < x < 1$ , то  $y=x$ , если  $x=1$ , то  $y=1$  и, наконец, если  $x>1$ , то  $y=x$ . Таким образом,

$$y = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0, \\ x & \text{при } x > 0. \end{cases}$$

График функции изображен на рис. 174.

---


$$19. y = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} (1+x) \operatorname{th} \lambda x.$$


---

Если  $x=0$ , то  $y=0$ . Если же  $x>0$ , то  $\operatorname{th} \lambda x \rightarrow 1$  и, значит,  $y=1+x$ . Наконец, если  $x<0$ , то  $\operatorname{th} \lambda x \rightarrow -1$  и, следовательно,  $y=-(1+x)$ . Таким образом,

$$y = \begin{cases} 1+x & \text{при } x > 0, \\ 0 & \text{при } x = 0, \\ -x-1 & \text{при } x < 0. \end{cases}$$

График функции изображен на рис. 175.

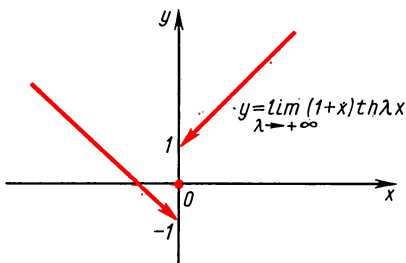


Рис. 175

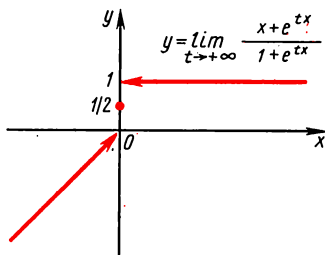


Рис. 176

---


$$20. y = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{x + e^{tx}}{1 + e^{tx}}.$$


---

Если  $x=0$ , то  $y=1/2$ . Далее, если  $x>0$ , то  $e^{tx} \rightarrow \infty$  при  $t \rightarrow +\infty$  и, значит,  $y=1$ . Наконец, если  $x<0$ , то  $e^{tx} \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow +\infty$ , т. е.  $y=x$ . Таким образом,

$$y = \begin{cases} 1 & \text{при } x > 0, \\ 1/2 & \text{при } x = 0, \\ x & \text{при } x < 0. \end{cases}$$

График функции изображен на рис. 176.

---


$$21. y = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2n} \sin \frac{\pi x}{2} + x^2}{x^{2n} + 1}.$$


---

Если  $x=0$ , то  $y=0$ ; если  $x=1$ , то  $y=1$ , а если  $x=-1$ , то  $y=0$ .

Пусть  $x=2k$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ). Тогда  $|x|>1$ ,  $x^{2n} \rightarrow \infty$  при  $n \rightarrow \infty$  и, следовательно,  $y=0$ .

Пусть  $x \neq 2k$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ). Тогда если  $|x|<1$ , то  $y=x^2$ , а если  $|x|>1$ , то  $y=\sin(\pi x/2)$ .

График функции изображен на рис. 177.

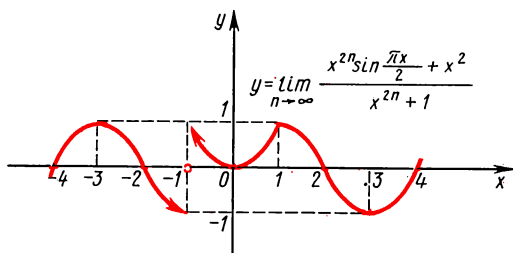


Рис. 177

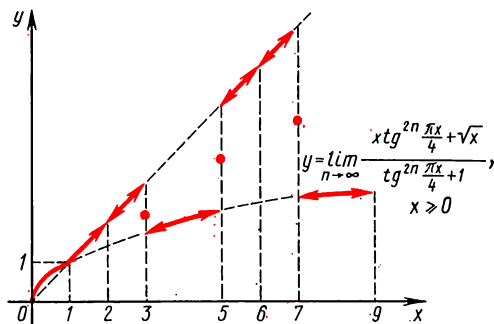


Рис. 178

$$22. y = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x \operatorname{tg}^{2n} \frac{\pi x}{4} + \sqrt{x}}{\operatorname{tg}^{2n} \frac{\pi x}{4} + 1}, \quad x \geq 0.$$

Если  $0 \leq x < 1$ , то  $\operatorname{tg}^{2n}(\pi x/4) \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ , откуда  $y = \sqrt{x}$ .

Если  $|\operatorname{tg}(\pi x/4)| < 1$ , то  $\operatorname{tg}^{2n}(\pi x/4) \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ , откуда  $y = \sqrt{x}$  при  $-\pi/4 + \pi k < \pi x/4 < \pi/4 + \pi k$  или  $4k - 1 < x < 4k + 1$ .

Если же  $|\operatorname{tg}(\pi x/4)| > 1$ , то  $\operatorname{tg}^{2n}(\pi x/4) \rightarrow \infty$  при  $n \rightarrow \infty$ , откуда  $y = x$  при  $-\pi/2 + \pi k < \pi x/4 < -\pi/4 + \pi k$  и при  $-3\pi/4 + \pi k < \pi x/4 < -\pi/2 + \pi k$ , т. е. при  $4k - 2 < x < 4k - 1$  и при  $4k - 3 < x < 4k - 2$ .

Наконец, если  $|\operatorname{tg}(\pi x/4)| = 1$ , то  $y = (x + \sqrt{x})/2$  при  $\pi x/4 = \pi/4 + \pi k/2$ , т. е. при  $x = 2k + 1$ .

Таким образом,

$$y = \begin{cases} (x + \sqrt{x})/2 & \text{при } x = 2k + 1, \\ \sqrt{x} & \text{при } 4k - 1 < x < 4k + 1; \quad 0 \leq x < 1, \\ x & \text{при } 4k - 2 < x < 4k - 1 \text{ и } 4k - 3 < x < 4k - 2; \quad k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

График функции изображен на рис. 178.

## Раздел VII

### НЕКОТОРЫЕ СПЕЦИАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ

Специальными функциями обычно называют функции, которые в общем случае нельзя выразить через элементарные функции. Большинство из них являются решениями дифференциальных уравнений специального вида и могут быть представлены в виде интегралов.

#### 1. Интегральная показательная функция (рис. 179)

$$E_n(x) = \int_1^{\infty} \frac{\exp(-xt)}{t^n} dt \quad (n = 0, 1, 2, \dots; x > 0)$$

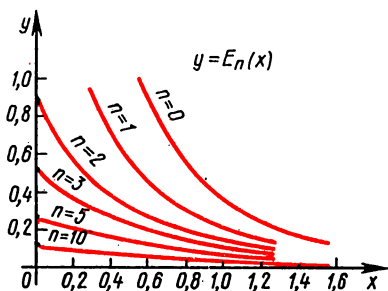


Рис. 179

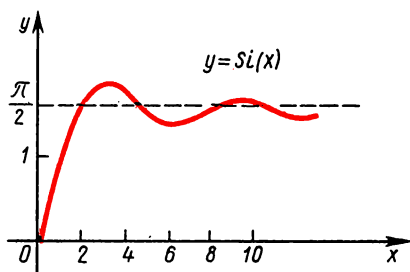


Рис. 180

вычисляется с помощью рекуррентного соотношения

$$E_{n+1} = \frac{1}{n} [e^{-x} - x E_n(x)], \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

В частности,

$$E_0(x) = \frac{e^{-x}}{x}, \quad E_1(x) = -\gamma - \ln x - \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{x^k}{k \cdot k!},$$

где  $\gamma = 0,57721156647$  — постоянная Эйлера.

## 2. Интегральный синус (рис. 180)

$$\text{Si} x = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$$

вычисляется разложением в ряд:

$$\text{Si} x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)(2n+1)!}.$$

Функция имеет горизонтальную асимптоту  $y = \pi/2$ .

## 3. Интегральный косинус (рис. 181)

$$\text{Ci} x = \gamma + \ln x + \int_0^x \frac{\cos t - 1}{t} dt$$

вычисляется разложением в ряд:

$$\text{Ci} x = \gamma + \ln x + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2n(2n)!}.$$

Ось  $x$  является горизонтальной асимптотой.

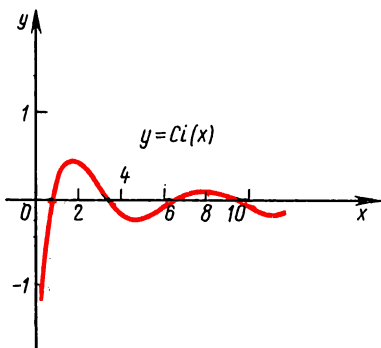


Рис. 181

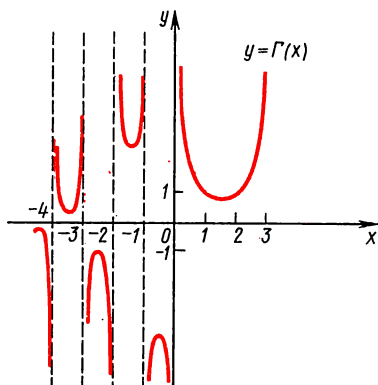


Рис. 182

#### 4. Гамма-функция (рис. 182) или интеграл Эйлера

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$$

является одной из наиболее распространенных специальных функций. В точках  $x = -n$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) функция имеет разрывы и соответственно вертикальные асимптоты.

#### 5. Интеграл вероятностей (рис. 183)

$$\operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$$

вычисляется разложением в ряд:

$$\operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)n!}.$$

#### 6. Эллиптические интегралы.

Полные эллиптические интегралы первого и второго рода определяются соответственно так:

$$K(m) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - m \sin^2 \theta}} \quad (\text{рис. 184});$$

$$E(m) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - m \sin^2 \theta} d\theta.$$

(рис. 185).

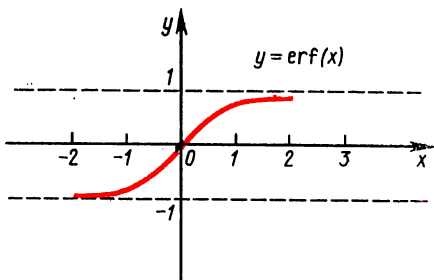


Рис. 183

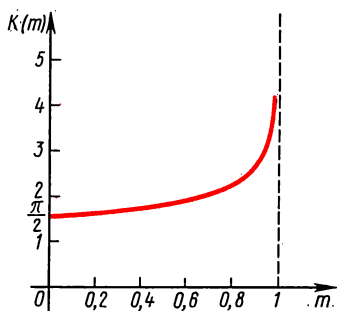


Рис. 184

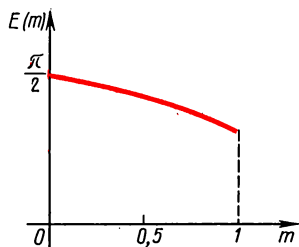


Рис. 185

Эллиптические интегралы можно вычислить разложением в ряд:

$$K(m) = \frac{\pi}{2} \left[ 1 + \left( \frac{1}{2} \right)^2 m + \left( \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \right)^2 m^2 + \dots \right];$$

$$E(m) = \frac{\pi}{2} \left[ 1 - \left( \frac{1}{2} \right)^2 \frac{m}{1} - \left( \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \right)^2 \frac{m^2}{3} - \left( \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \right)^2 \frac{m^3}{5} - \dots \right]$$

## Раздел VIII

### НЕКОТОРЫЕ СТАТИСТИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

К основным статистическим функциям относятся плотности вероятности и функции распределения для различных законов распределения.

#### § 1. Дискретные распределения

##### 1. Распределение Бернулли.

Случайная величина  $\xi$  имеет распределение Бернулли с параметром  $p$  ( $0 < p < 1$ ), если

$$P\{\xi = 1\} = p, \quad P\{\xi = 0\} = 1 - p = q \quad (\text{рис. 186}).$$

Функция распределения (рис. 187) имеет вид

$$F(x) = P\{\xi \leq x\} = \begin{cases} 0, & x \leq 0; \\ 1 - p, & 0 < x \leq 1; \\ 1, & x > 1. \end{cases}$$

##### 2. Биномиальное распределение.

Случайная величина  $\xi$  имеет биномиальное распределение с параметрами  $n$ ,  $p$  ( $0 < p < 1$ ,  $n \geq 1$ ), если

$$P\{\xi = k\} = C_n^k p^k (1 - p)^{n-k}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n \quad (\text{рис. 188}).$$

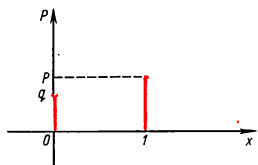


Рис. 186

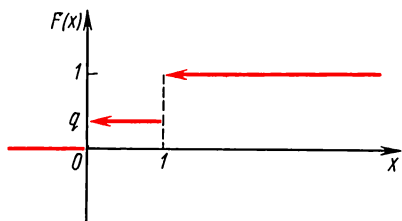


Рис. 187

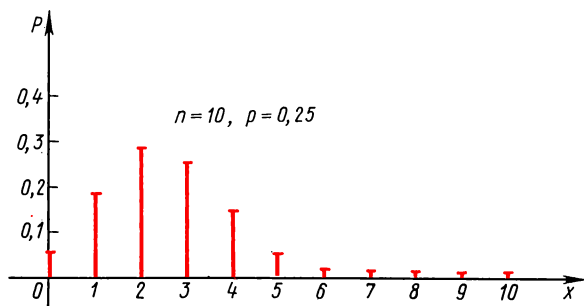


Рис. 188

Функция распределения (рис. 189) имеет вид

$$F(x) = \begin{cases} \sum_{k=1}^l C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, & l < x \leq l+1; \\ 1, & x > n; \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

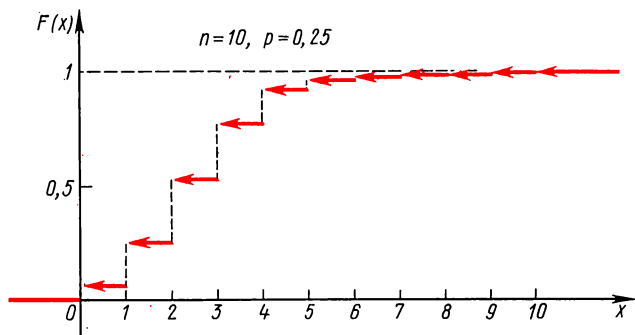


Рис. 189



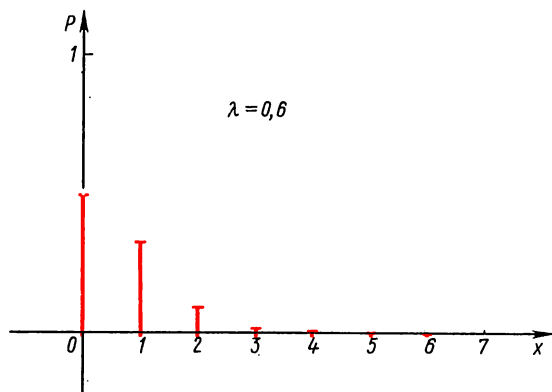


Рис. 190

### 3. Распределение Пуассона.

Случайная величина  $\xi$  имеет распределение Пуассона с параметром  $\lambda$  ( $\lambda > 0$ ), если

$$P\{\xi = k\} = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!},$$

$k = 0, 1, 2, \dots$  (рис. 190).

Функция распределения (рис. 191) имеет вид

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0; \\ \sum_{m=0}^l \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}, & l < x \leq l+1. \end{cases}$$

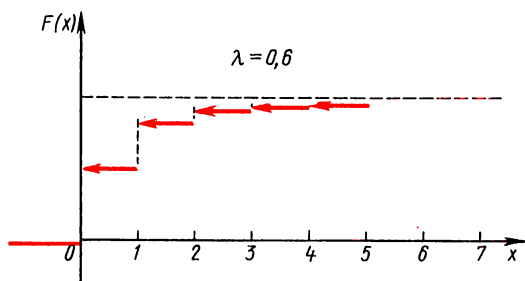


Рис. 191

## § 2. Непрерывные распределения

### 1. Равномерное распределение.

Случайная величина  $\xi$  имеет равномерное распределение на отрезке  $[a, b]$  ( $a < b$ ), если

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x \in [a, b]; \\ 0, & x \notin [a, b] \end{cases} \quad (\text{рис. 192}),$$

где  $f(x)$  — плотность вероятности соответствующей случайной величины.

Функция распределения изображена на рис. 193.

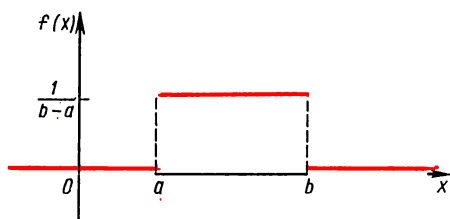


Рис. 192

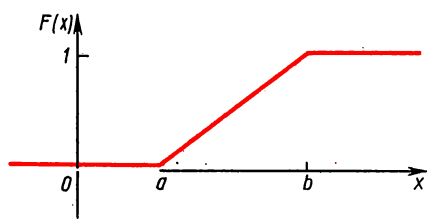


Рис. 193

## 2. Распределение Симпсона.

Случайная величина  $\xi$  имеет распределение Симпсона (треугольное распределение) на отрезке  $[a, b]$ , если

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{b-a} - \frac{2}{(b-a)^2} |a+b-2x|, & x \in [a, b]; \\ 0, & x \notin [a, b] \end{cases} \quad (\text{рис. 194}).$$

Функция распределения изображена на рис. 195.

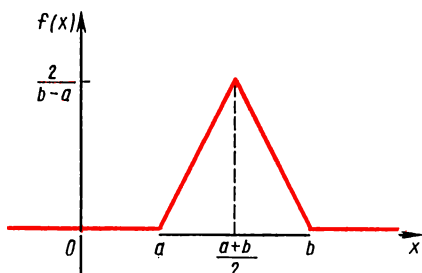


Рис. 194

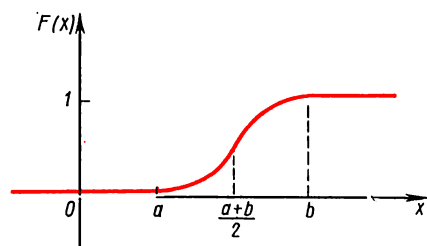


Рис. 195

## 3. Показательное распределение.

Случайная величина  $\xi$  имеет показательное (экспоненциальное) распределение с параметром  $\lambda > 0$ , если

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0; \\ 0, & x < 0 \end{cases} \quad (\text{рис. 196}).$$

Функция распределения изображена на рис. 197.

## 4. Нормальное распределение.

Случайная величина  $\xi$  имеет нормальное распределение с параметрами  $a, \sigma$ , если

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} \quad x \in (-\infty, +\infty) \quad (\text{рис. 198}).$$

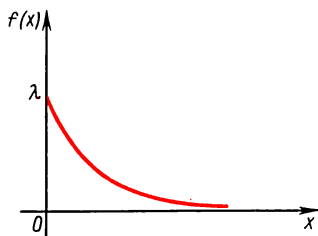


Рис. 196

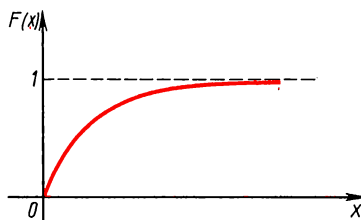


Рис. 197

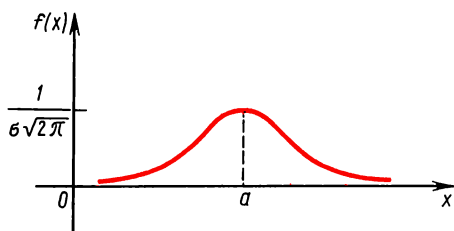


Рис. 198

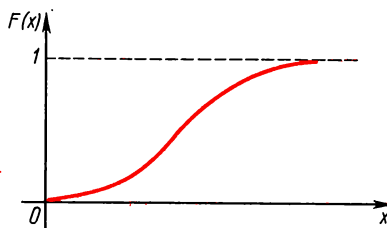


Рис. 199

Функция распределения изображена на рис. 199.

### 5. $\chi^2$ -распределение.

Случайная величина  $\xi$  имеет  $\chi^2$ -распределение с  $\alpha$  степенями свободы, если

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^{\alpha/2} \Gamma(\frac{\alpha}{2})} x^{\frac{\alpha}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} & x > 0; \\ 0, & x \leq 0 \end{cases} \quad (\text{рис. 200}).$$

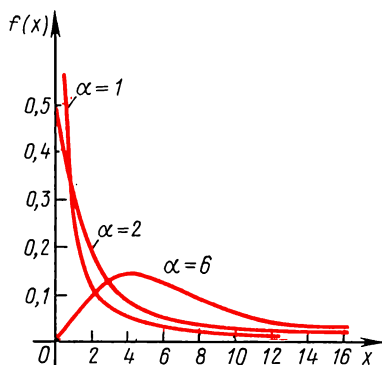


Рис. 200

### 6. Распределение Стьюдента ( $t$ -распределение).

Случайная величина  $\xi$  имеет распределение Стьюдента с  $\alpha$  ( $\alpha > 0$ ) степенями свободы, если

$$f(x) = \frac{\Gamma(\frac{\alpha+1}{2})}{\Gamma(\frac{\alpha}{2}) \sqrt{\alpha\pi}} \times \left(1 + \frac{x^2}{\alpha}\right)^{-\frac{\alpha+1}{2}} \\ x \in (-\infty, \infty) \quad (\text{рис. 201}).$$

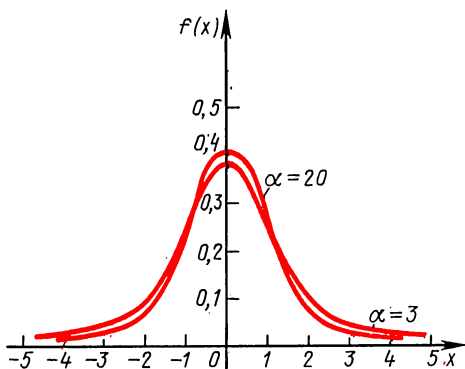


Рис. 201

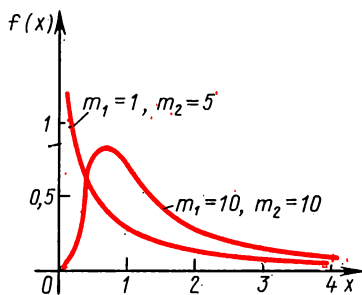


Рис. 202

## 7. F-распределение (распределение Фишера).

Случайная величина  $\xi$  имеет F-распределение с  $m_1, m_2$  степенями свободы, если

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0; \\ \frac{\Gamma\left(\frac{m_1+m_2}{2}\right) m_1^{\frac{m_1}{2}} m_2^{\frac{m_2}{2}} x^{\frac{m_1}{2}-1}}{\Gamma\left(\frac{m_1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{m_2}{2}\right)} (m_2 + m_1 x)^{-\frac{m_1+m_2}{2}} & x > 0 \end{cases} \quad (\text{рис. 202}).$$

## Раздел IX

### КРИВЫЕ НА ПЛОСКОСТИ

#### § 1. Основные понятия

**1. Отображения.** Пусть  $X$  и  $Y$  – произвольные непустые множества. Если каждому элементу  $x$  множества  $X$  поставлен в соответствие некоторый элемент  $y$  множества  $Y$ , то говорят, что задано *отображение* множества  $X$  в множество  $Y$ . Элемент  $y = f(x)$  называется *образом элемента  $x$* , а множество точек  $f(x)$ , составленное из образов всех точек множества  $X$ , — *образом множества  $X$* .

Если  $f(X) = Y$ , то говорят, что  $f$  — *отображение* множества  $X$  на множество  $Y$ , или что  $f$  есть *сюръекция*. Отображение  $f$  называется *инъекцией*, если  $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ .

Отображение  $f$ , являющееся одновременно сюръекцией и инъекцией, называется *биекцией*. Про такое отображение говорят, что оно устанавливает взаимно однозначное соответствие между элемен-

тами множеств  $X$  и  $Y$ . Для биекции существует обратное отображение  $f^{-1}$ , которое каждой точке  $f(x)$  сопоставляет точку  $x$  и также является биекцией.

**2. Вектор-функция.** Рассмотрим вектор-функцию  $\bar{r} = \bar{r}(t)$ , заданную на открытом множестве прямой  $\mathbf{R}$ , т. е. вектор-функцию одной действительной переменной  $t$ . Задание одной вектор-функции (в плоском случае) равносильно заданию двух скалярных функций, называемых ее *составляющими*:  $\bar{r}(t) = \{x(t); y(t)\}$ .

Пусть вектор-функция  $\bar{r}(t)$  определена в некоторой окрестности точки  $t_0$ , кроме, быть может, самой точки  $t_0$  и  $\bar{a}$  — некоторый фиксированный вектор.

Вектор  $\bar{a}$  называется *пределом вектор-функции*  $\bar{r}(t)$  и обозначается  $\bar{a} = \lim_{t \rightarrow t_0} \bar{r}(t)$ , если для любого  $\varepsilon > 0$  существует  $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$  такое, что  $0 < |t - t_0| < \delta \Rightarrow |\bar{r}(t) - \bar{a}| < \varepsilon$ .

Вектор-функция  $\bar{r}(t)$  называется *непрерывной* в точке  $t_0$ , если для любой окрестности  $W$  в  $\mathbf{R}^2$  точки  $\bar{r}(t_0)$  найдется такая окрестность  $V$  в  $\mathbf{R}$  точки  $t_0$ , что  $\bar{r}(V) \subset W$ .

Отображение  $\bar{r} = \bar{r}(t)$  называется *гомеоморфизмом*, если оно биективно и  $\bar{r}(t)$  непрерывно вместе с  $\bar{r}^{-1}(t)$ .

Если вектор-функция определена в точке  $t_0$  и существует предел

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\bar{r}(t_0 + \Delta t) - \bar{r}(t_0)}{\Delta t},$$

то он называется *производной* данной вектор-функции в точке  $t_0$  и обозначается  $\bar{r}'(t_0)$ .

Если функция имеет непрерывную  $k$ -ю производную, то говорят, что она принадлежит классу  $C^k$ , и называют *гладкой* функцией.

Отображение  $f$  называется *диффеоморфизмом* класса  $C^k$ , если  $f$  биективно и принадлежит классу  $C^k$  вместе со своим обратным отображением  $f^{-1}$ .

**3. Пути и кривые.** Пусть  $I$  — интервал, отрезок или полуоткрытый интервал на прямой  $\mathbf{R}$ . *Путем* класса  $C^k$  в пространстве  $\mathbf{R}^3$  называется вектор-функция  $\bar{r}: I \rightarrow \mathbf{R}^3$  класса  $C^k$ , которую будем обозначать  $(I, \bar{r})$ .

Путь  $(I, \bar{r})$  называется:

*простым*, если отображение  $\bar{r}$  инъективно;

*регулярным*, если  $\bar{r}'(t_0) \neq \bar{0}$  для всякой внутренней точки  $t_0 \in I$ ;

*бирегулярным*, если  $\bar{r}'(t_0) \nparallel \bar{r}''(t)$  для всякой внутренней точки  $t_0 \in I$ .

Два пути  $(I, \bar{r}(t))$  и  $(J, \bar{\rho}(s))$  класса  $C^k$ , где  $I, J$  — интервалы, называются *эквивалентными*, если существует диффеоморфизм  $\lambda: I \rightarrow J$  класса  $C^k$  такой, что  $\bar{r}(t) = \bar{\rho}(\lambda(t))$ . Классы эквивалентных путей называются *кривыми*, а каждый путь этого класса — *параметризацией кривой*. Функция  $\lambda: I \rightarrow J$ , задающая эквивалентность двух

путей, называется *заменой параметра*. Если  $(I, \bar{r})$  — путь, то множество  $\bar{r}(I) \subset \mathbb{R}^3$  называется *образом* этого пути.

Все эквивалентные пути, образующие данную кривую, имеют один и тот же образ, который называется *образом* этой кривой. В дальнейшем образ кривой мы будем называть просто *кривой*, хотя различные кривые могут иметь один и тот же образ. Кривая, образ которой содержится в некоторой плоскости, называется *плоской*. Кривая называется *простой* (*регулярной*, *бирегулярной*), если существует ее параметризация, которая является простой (регулярной, бирегулярной).

Пусть задан путь  $r = \bar{r}(t)$ . Рассмотрим все такие эквивалентные ему пути, которые получаются заменой параметра  $s = \lambda(t)$ , имеющего положительную производную  $\lambda'(t) > 0$ . Класс таких путей называется *ориентированной кривой*.

Параметризация  $\bar{r} = \bar{r}(s)$  кривой называется *натуральной*, если  $|\bar{r}'(s)| = 1$ . Всякая регулярная кривая допускает натуральную параметризацию. Натуральный параметр, обозначаемый обычно через  $s$ , есть длина дуги кривой, отсчитываемая от некоторой начальной точки и взятая со знаком  $+$  или  $-$ .

*Касательной* к кривой  $\bar{r}(t)$  в точке  $M$  называется прямая, проходящая через точку  $M$  и имеющая вектор  $\bar{r}'(t)$  в качестве своего направляющего вектора.

Пусть  $\bar{r} = \bar{r}(s)$  — натуральная параметризация кривой. Тогда вектор  $\bar{r}''(s)$  называется *вектором ее кривизны* в точке  $s$ , а длина этого вектора — *кривизной* и обозначается  $K(s)$ . Если вектор-функция  $\bar{r}: I \rightarrow \mathbb{R}^2, t \rightarrow \bar{r}(t)$  является параметризацией кривой, то равенство  $\bar{r} = \bar{r}(t)$  называется *векторным уравнением* кривой.

Пусть  $(x(t); y(t))$  — составляющие вектор-функции  $\bar{r}(t)$  относительно системы прямоугольных декартовых координат в  $\mathbb{R}^2$ . Тогда уравнение

$$\bar{r} = \bar{r}(t) \quad (1)$$

равносильно двум параметрическим уравнениям

$$x = x(t); y = y(t). \quad (2)$$

Частным случаем параметрического задания кривой служит *явное задание* кривой:

$$y = f(x). \quad (3)$$

Кривая может быть задана также с помощью уравнения

$$F(x, y) = 0; \quad (4)$$

в этом случае говорят о *неявном задании* кривой.

Вместо декартовых прямоугольных координат можно использовать криволинейные координаты (в частности, полярные координаты)

**4. Касательная и нормаль.** Уравнения касательных к кривым, заданным уравнениями (1) — (4), соответственно имеют вид

$$\begin{aligned}\bar{\rho} &= \bar{r} + \lambda \bar{r}', \\ \frac{X-x}{x'} &= \frac{Y-y}{y'}, \\ Y-y &= f'(x)(X-x), \\ (X-x)F'_x + (Y-y)F'_y &= 0,\end{aligned}$$

где  $X, Y$  — текущие координаты точки на касательной,  $\rho$  — радиус-вектор этой точки,  $x, y$  — координаты точки касания.

Уравнения нормалей соответственно имеют вид

$$\begin{aligned}(\bar{\rho} - \bar{r})\bar{r}' &= 0, \\ (X-x)x' + (Y-y)y' &= 0, \\ X-x + (Y-y)f'(x) &= 0, \\ \frac{X-x}{F'_x} &= \frac{Y-y}{F'_y}.\end{aligned}$$

**5. Асимптоты.** Если кривая  $x=x(t)$ ,  $y=y(t)$  при  $t \rightarrow t_0$  имеет асимптоту, уравнение которой  $Y=kX+b$ , то

$$k = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{y(t)}{x(t)}, \quad b = \lim_{t \rightarrow t_0} (y(t) - kx(t)).$$

Если кривая  $\bar{r}=\bar{r}(t)$  при  $t \rightarrow t_0$  имеет вертикальную асимптоту, то ее уравнение есть  $x=a$ , где  $a = \lim_{t \rightarrow t_0} x(t)$ ; при этом  $\lim_{t \rightarrow t_0} y(t) = \infty$ .

**6. Особые точки.** Пусть кривая задана параметризацией  $\bar{r}=\bar{r}(t)$  и  $M=\bar{r}(t_0)$  — такая ее точка, что  $\bar{r}'(t_0)=\bar{0}$ . Точку  $M$  будем называть *особой (нерегулярной)*. Пусть, кроме того,  $\bar{r}^{(p)}(t_0)$  — первая отличная от нуля производная и  $\bar{r}^{(q)}(t_0)$  — первая из производных, не коллинеарных вектору  $\bar{r}^{(p)}(t_0)$ . Тогда возможны следующие случаи: 1)  $p$  — нечетное,  $q$  — четное; 2)  $p$  — нечетное,  $q$  — нечетное; 3)  $p$  — четное,  $q$  — нечетное; 4)  $p$  — четное,  $q$  — четное.

В первом случае образ кривой в окрестности точки  $M$  имеет такой же вид, как и в окрестности регулярной точки. Во втором случае  $M$  является точкой перегиба. В третьем случае  $M$  называется *точкой возврата I рода*. В ее окрестности кривая ведет себя так, как показано на рис. 203, а. В четвертом случае  $M$  называется *точкой возврата II рода*. В ее окрестности кривая имеет такой вид, как на рис. 203, б.

**7. Кривизна и точки перегиба кривой. Вершины кривой.** В случае явного задания кривой ее кривизна  $K$  в точке  $M$  определяется по формуле

$$K = \frac{y''(x)}{(1 + y'^2(x))^{3/2}}.$$

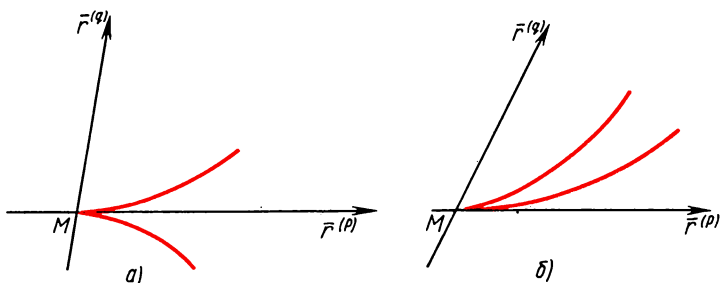


Рис. 203

В случае параметрического задания кривизна определяется по формуле

$$K = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}},$$

где  $\dot{x} = x'(t)$ ,  $\dot{y} = y'(t)$ ,  $\ddot{x} = x''(t)$ ,  $\ddot{y} = y''(t)$ . Чем больше  $|K|$ , тем сильнее изогнута кривая.

Если  $K > 0$ , то кривая в окрестности точки  $M$  расположена слева от касательной (рис. 204, а), а если  $K < 0$ , то справа (рис. 204, б). Если же касательная пересекает кривую в точке  $M$  так, что в этой точке  $K = 0$ , причем  $K$  меняет знак в точке  $M$ , то  $M$  — точка перегиба (рис. 204, в).

Чтобы найти точку перегиба в случае параметрического задания кривой, необходимо сначала решить уравнение  $K = 0$ , откуда

$$\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y} = 0 \quad (\text{где } \dot{x}^2 + \dot{y}^2 \neq 0),$$

и найти точку, в которой  $K = 0$ , а затем проверить, меняет ли  $K$  знак при прохождении через эту точку. Точки кривой, в которых кривизна  $K$  имеет экстремум (максимум или минимум), называются *вершинами*.

В случае параметрического задания кривой при  $\dot{x}(t_0) = \dot{y}(t_0) = 0$  ее поведение в окрестности  $t_0$  можно исследовать, непосредственно используя разложение по формуле Тейлора:

$$x = x_0 + \frac{1}{2!} \ddot{x}(t_0) (t - t_0)^2 + \frac{1}{3!} \dddot{x}(t_0) (t - t_0)^3 + \dots,$$

$$y = y_0 + \frac{1}{2!} \ddot{y}(t_0) (t - t_0)^2 + \frac{1}{3!} \dddot{y}(t_0) (t - t_0)^3 + \dots,$$

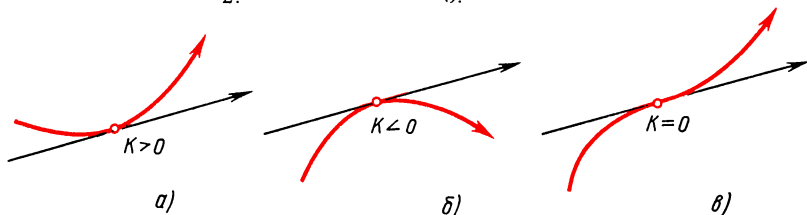


Рис. 204



где  $x_0 = x(t_0)$ ,  $y_0 = y(t_0)$ . При этом в каждом конкретном случае можно оценить знаки приращений  $x - x_0$  и  $y - y_0$  при  $t > t_0$  и  $t < t_0$ . Если в окрестности особой точки можно выделить две элементарные линии, проходящие через нее, то такая точка называется *точкой самопересечения*. При параметрическом задании кривой этой точке соответствуют различные значения параметра.

Исследовать кривую — значит выявить совокупность важнейших свойств кривой, позволяющих достаточно точно построить ее. К важнейшим свойствам можно отнести наличие или отсутствие особых точек, точек перегиба, асимптот, точек самопересечения, точек, в которых касательные параллельны координатным осям и в которых линия пересекает эти оси.

Вообще говоря, различают свойства, зависящие от выбора системы координат (например, пересечение кривой с осями координат, наклон касательной, точки максимума или минимума и т. п.), и свойства, инвариантные относительно преобразования системы координат (например, точки перегиба, вершины кривой, кривизна и т. п.).

С другой стороны, различают локальные свойства, относящиеся к весьма малым частям кривой (например, кривизна) и свойства кривой в целом (например, число вершин, длина замкнутой кривой и т. п.).

Построение кривой на плоскости удобно проводить по следующей схеме:

- 1<sup>0</sup>. Определяют область регулярности кривой и особые точки.
- 2<sup>0</sup>. Находят точки самопересечения.
- 3<sup>0</sup>. Отыскивают касательные, параллельные осям.
- 4<sup>0</sup>. Находят точки перегиба.
- 5<sup>0</sup>. Определяют асимптоты.
- 6<sup>0</sup>. Отмечают некоторые общие свойства кривой (например, симметрию относительно какой-либо оси). Для облегчения построения кривой находят опорные (т. е. промежуточные) точки.

## § 2. Кривые, заданные параметрически

**Примеры построения кривых в случае, когда  $x(t)$  и  $y(t)$  — многочлены.**

1.  $x = t^2$ ,  $y = \frac{2}{3}t(3 - t^2)$ .

1<sup>0</sup> Функции  $x(t)$  и  $y(t)$  определены для всех значений параметра  $t$  и дифференцируемы во всех точках. Так как производные  $x' = 2t$ ,  $y' = 2 - 2t$  не обращаются в нуль одновременно, т. е.  $\vec{r}'(t)$  нигде не обращается в нуль, то кривая  $\vec{r}(t)$  регулярна (не имеет особых точек) при всех значениях  $t$ .

Угловый коэффициент касательной определяется из уравнения  $y'_x =$

$= \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{1-t^2}{t}$ . В частности, при  $t=0$ , т. е. в начале координат, касательная совпадает с осью ординат.

2°. Отметим, что хотя каждому значению  $t$  соответствует одна вполне определенная точка кривой, одной и той же точке кривой могут соответствовать разные значения параметра  $t$ .

Так как для двух значений  $t$  и  $t'$  абсцисса  $x$  и ордината  $y$  в точке самопересечения должны быть одними и теми же, то из уравнений кривой следуют два условия для  $t$  и  $t'$ :

$$t^2 = t'^2, \quad t(3-t^2) = t'(3-t'^2).$$

Поскольку  $t$  и  $t'$  предполагаются различными, из первого уравнения следует  $t' = -t$ . Подставляя это значение во второе уравнение, получим  $t(3-t^2) = 0$ . Если  $t=0$ , то и  $t'=0$ , и значения  $t$  и  $t'$  совпадут, что невозможно. Остается только одна возможность:  $t = \sqrt{3}$ ,  $t' = -\sqrt{3}$ . Этим значениям соответствует одна и та же точка  $M_3(3; 0)$ , но угловые коэффициенты касательных различны:

$$y'_x \Big|_{t=\sqrt{3}} = \frac{1-t^2}{t} \Big|_{t=\sqrt{3}} = -\frac{2}{\sqrt{3}}, \quad y'_x \Big|_{t'=-\sqrt{3}} = \frac{1-t'^2}{t'} \Big|_{t'=-\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Через точку  $M_3$  кривая проходит дважды (точка самопересечения).

3° Так как  $y'_x = 0$  при  $t = \pm 1$ , то касательные параллельны оси абсцисс в точках  $M_1(1; 4/3)$  и  $M_2(1; -4/3)$ . Кроме того, при  $t=0$  (т. е. в начале координат) касательная параллельна оси ординат.

4° Дифференцируя первую производную  $y'_x = \frac{1-t^2}{t}$  по переменной  $x$  как сложную функцию, получим  $y''_{xx} = -\frac{1+t^2}{2t^3}$ ; аналогично,  $x''_{yy} = \frac{1+t^2}{2(1-t^2)^3}$ . Если  $t > 0$ , то  $y''_{xx} < 0$ , и выпуклость кривой обращена в положительную сторону оси ординат (кривая выпукла вверх), а если  $t < 0$  — в отрицательную (выпукла вниз). При  $t=0$  кривая меняет характер выпуклости, но здесь нет точки перегиба. В самом деле, в этой точке касательная параллельна оси ординат, и мы должны рассматривать уравнение вида  $x = \varphi(y)$ ; так как  $x''_{yy} = \frac{1+t^2}{2(1-t^2)^3} \Big|_{t=0} = \frac{1}{2} > 0$ , то выпуклость кривой обращена в отрицательную сторону оси абсцисс.

5° Точка кривой уходит в бесконечность при  $t \rightarrow \infty$ , т. е. при  $x \rightarrow \infty$  и  $y \rightarrow \infty$ . Далее, из того, что  $\frac{y}{x} = \frac{2}{3} \frac{3-t^2}{t} \rightarrow \infty$ , следует, что может существовать только асимптота, параллельная оси ординат. Однако если  $t \rightarrow \infty$ , то и  $x \rightarrow \infty$ , т. е. кривая не имеет асимптоты.

6° Из уравнений кривой видно, что кривая симметрична относительно оси абсцисс: при изменении знака  $t$  меняется только знак ординаты и сохраняется знак абсциссы. Следовательно, достаточно построить кривую только для положительных значений  $t$ . Составим таблицу значений для опорных точек:

	$t$	$x$	$y$	$y'_x$
0	0	0	0	$\infty$
$M_1$	1	1	$4/3$	0
$M_3$	3	3	0	$-1,1$
$M_4$	2	4	$-4/3$	$-1,5$

Кривая изображена на рис. 205.

З а м е ч а н и е 1. Отметим, что если  $t \rightarrow +\infty$ , то  $x = t^2 \rightarrow +\infty$ ,  $y \sim -\frac{2}{3}t^3 \rightarrow -\infty$ . Отсюда следует, что  $y \sim -\frac{2}{3}x^{3/2}$  при  $x \rightarrow +\infty$ .

Таким образом, на бесконечности кривая ведет себя как полукубическая парабола (с соответствующими знаками).

Если же  $t \rightarrow 0$ , то  $x = t^2 \rightarrow 0$ ,  $y \sim 2t \rightarrow 0$ . Значит,  $y \sim 2\sqrt{x}$ , т. е. в начале координат кривая ведет себя как парабола  $y^2 = 4x$ .

З а м е ч а н и е 2. Кривая допускает представление в явном виде: так как  $t = \pm\sqrt{x}$ , то  $y = \pm\frac{2}{3}\sqrt{x}(3-x)$ . Следовательно, если  $x \rightarrow 0$ , то  $y \sim \pm 2\sqrt{x}$ ; если  $x \rightarrow 3$ , то  $y \sim \pm\frac{2}{\sqrt{3}}(3-x)$ ; если  $x \rightarrow \infty$ , то  $y \sim \pm\frac{2}{3}x\sqrt{x}$ .

---

## 2. $x = 4t^2$ , $y = 3t(t^2 + 1)$ .

---

1<sup>0</sup> Функции  $x(t)$  и  $y(t)$  определены для всех значений параметра  $t$  и дифференцируемы во всех точках. Так как производные  $x'_t = 8t$  и  $y'_t = 9t^2 + 3$  не обращаются в нуль одновременно, то кривая  $\vec{r}(t)$  не имеет особых точек при всех значениях  $t$ .

Угловым коэффициентом касательной составляет  $y'_x = \frac{9t^2 + 3}{8t}$ . В частности, при  $t = 0$ , т. е. в начале координат, касательная совпадает с осью ординат.

2<sup>0</sup> Составляем систему уравнений

$$4t^2 = 4t'^2, \quad 3t(t^2 + 1) = 3t'(t'^2 + 1).$$

Из первого уравнения следует, что  $t = -t'$ . Подставляя это значение во второе уравнение, найдем  $t' = 0$ . В таком случае и  $t = 0$ , что невозможно, поскольку  $t$  и  $t'$  предполагаются различными. Итак, точек самопересечения нет.

3<sup>0</sup> Касательная параллельна оси ординат в начале координат (при  $t = 0$ ).

4<sup>0</sup> Имеем  $y''_{xx} = \frac{9t^2 - 3}{64t^3}$ ,  $x''_{yy} = \frac{8}{9} \frac{1 - 3t^2}{(3t^2 + 1)^3}$ . Если  $0 < t < 1/\sqrt{3}$ , то  $y''_{xx} < 0$  и кривая выпукла вверх; если же  $-1/\sqrt{3} < t < 0$ , то  $y''_{xx} > 0$  и кривая выпукла вниз. Однако при  $t = 0$  точки перегиба нет, поскольку

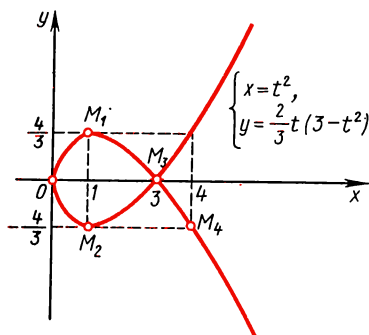


Рис. 205

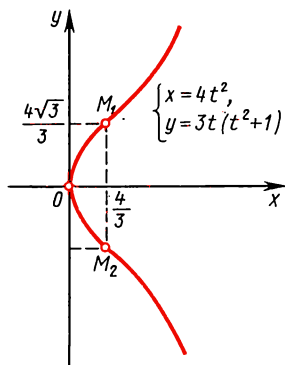


Рис. 206

$x''_{yy}|_{t=0} = 8/9 > 0$ ; следовательно, выпуклость кривой обращена в отрицательную сторону оси абсцисс.

Далее,  $y''_{xx} = 0$  при  $t = \pm 1/\sqrt{3}$ ; при  $t > 1/\sqrt{3}$  имеем  $y''_{xx} > 0$ , т. е. кривая выпукла вниз, а при  $0 < t < 1/\sqrt{3}$  выпукла вверх. Таким образом,  $M_1(4/3; 4/\sqrt{3})$  и  $M_2(4/3; -4/\sqrt{3})$  являются точками перегиба кривой.

5<sup>0</sup> Повторяя те же рассуждения, что и в предыдущем примере, заключаем, что кривая не имеет асимптот.

6<sup>0</sup> Так как кривая симметрична относительно оси абсцисс, то достаточно построить ее только для положительных значений  $t$ . Составим таблицу значений для опорных точек:

	$t$	$x$	$y$	$y'_x$
0	0	0	0	$\infty$
$M_1$	$1/\sqrt{3}$	$4/3$	$\frac{4\sqrt{3}}{3}$	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$
$M_3$	1	4	6	1,5

Кривая изображена на рис. 206.

З а м е ч а н и е 1. Отметим, что если  $t \rightarrow +0$ , то  $x = 4t^2 \rightarrow 0$ ,  $y \sim 3t \rightarrow 0$ . Отсюда имеем  $y \sim \frac{3}{2}\sqrt{x}$ , т. е. в начале координат кривая ведет себя как парабола  $y^2 = \frac{9}{4}x$ . Если же  $t \rightarrow +\infty$ , то  $x = 4t^2 \rightarrow +\infty$ ,  $y \sim 3t^2 \rightarrow +\infty$ . Поэтому  $y \sim (3/8)x^{3/2}$ , т. е. на бесконечности кривая ведет себя как полукубическая парабола (с соответствующими знаками).

З а м е ч а н и е 2. Кривая допускает представление в явном виде:  $y = \pm \frac{3}{2}\sqrt{x}\left(\frac{x}{4} + 1\right)$ . Таким образом, если  $x \rightarrow 0$ , то  $y \sim \pm \frac{3}{2}\sqrt{x}$ , а если  $x \rightarrow \infty$ , то  $y \sim \pm (3/8)x^{3/2}$ .

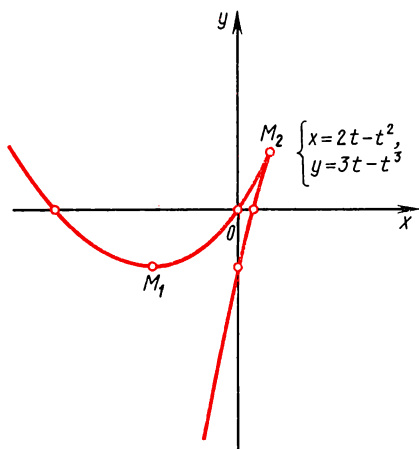


Рис. 207

---


$$3. x = 2t - t^2, y = 3t - t^3$$


---

1<sup>0</sup> Находим  $x'_t = 2 - 2t$ ,  $y'_t = 3 - 3t^2$ . Так как  $\bar{r}'(1) = 0$ , то кривая  $\bar{r}(t)$  регулярна для всех  $t$ , кроме  $t = 1$ .

Представим  $x(t)$  и  $y(t)$  в следующем виде:

$$x(t) = 1 - (t-1)^2, y(t) = 2 - 3(t-1)^2 - (t-1)^3$$

Эти представления являются разложениями функций в ряд Тейлора по степеням  $t-1$ . Отсюда сразу следует, что  $\bar{r}''(1) = \{-2; -6\} \neq 0$ ,  $\bar{r}'''(1) = \{0; -6\} \neq 0$  и  $p = 2$ ,  $q = 3$ . Таким образом, точка  $M_2(1; 2)$  является точкой возврата I рода.

2<sup>0</sup> Система  $2t - t^2 = 2t' - t'^2$ ,  $3t - t^3 = 3t' - t'^3$  не имеет решений, для которых  $t \neq t'$ . Следовательно, точек самопересечения нет.

3<sup>0</sup> Имеем  $y'_x = \frac{3}{2}(1+t)$ . При  $t = -1$ , т. е. в точке  $M_1(-3; -2)$ , касательная параллельна оси абсцисс.

4<sup>0</sup> Находим  $y''_{xx} = \frac{3}{4(1-t)}$ . При  $t > 1$  кривая выпукла вверх, а при  $t < 1$  — выпукла вниз. Точек перегиба нет.

5<sup>0</sup> Если  $t \rightarrow +\infty$ , то  $x \rightarrow -\infty$ ,  $y \rightarrow -\infty$ ,  $y/x \rightarrow \infty$  и, значит, асимптот нет.

6<sup>0</sup> Если  $t = 0$ , то  $x = 0$ ,  $y = 0$ ; если  $t = 2$ , то  $x = 0$ ,  $y = -2$ ; если  $t = \pm\sqrt{3}$ , то  $y = 0$ ,  $x = -3 \pm 2\sqrt{3}$ .

Кривая изображена на рис. 207.

---


$$4. x = t^3 + 3t + 1, y = t^3 - 3t + 1.$$


---

1<sup>0</sup> Находим  $x'_t = 3t^2 + 3$ ,  $y'_t = 3t^2 - 3$ . Особых точек нет, т. е. кривая регулярна для всех  $t$ .

2<sup>0</sup> Точек самопересечения нет.

3<sup>0</sup> Имеем  $y'_x = \frac{t^2-1}{t^2+1}$ . Отсюда следует, что при  $t = 1$  и  $t = -1$ , т. е. в точках  $M_5(5; -1)$  и  $M_1(-3; 3)$ , касательная параллельна оси абсцисс. Если  $|t| < 1$ , то  $y'_x > 0$ , а если  $|t| > 1$ , то  $y'_x < 0$ ; поэтому в точке  $M_5(5; -1)$  кривая имеет минимум, а в точке  $M_1(-3; 3)$  — максимум.

4<sup>0</sup> Имеем  $y''_{xx} = \frac{4t}{3(t^2+1)^3}$ . При  $t > 0$  кривая выпукла вниз, а при  $t < 0$  — выпукла вверх. При  $t = 0$  получаем точку перегиба  $M_3(1; 1)$ .

5<sup>0</sup> Если  $t \rightarrow \infty$ , то  $x \rightarrow \infty$ ,  $y \rightarrow \infty$ ,  $y/x \rightarrow 1$ , но  $\lim_{t \rightarrow \infty} (y-x) = -\infty$ .

Асимптот нет.

6<sup>0</sup>. Точки пересечения с осями координат  $M_0(-11,28; 0)$ ,  $M_2(0; 1,93)$ ,  $M_4(1,93; 0)$ ,  $M_6(9,19; 0)$  можно найти с помощью микрокалькулятора.

Кривая изображена на рис. 208.

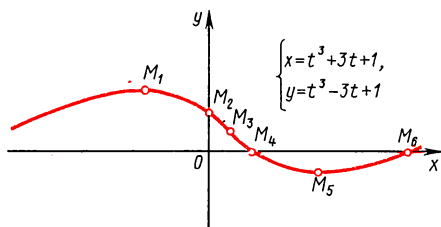


Рис. 208

---

5.  $x=t^4$ ,  $y=t^2-t^5$

---

1<sup>0</sup>. Функции  $x(t)$  и  $y(t)$  определены для всех значений параметра  $t$  и дифференцируемы во всех точках.

Поскольку производные  $x'_t = 4t^3$ ,  $y'_t = 2t - 5t^4$  обращаются в нуль одновременно только в начале координат, эта точка является особой. Кроме того, так как  $x^{(IV)}(0) \neq 0$ ,  $y'' \neq 0$ , то  $p = 4$  и  $q = 2$ , т. е. четные, и, значит, начало координат есть точка возврата II рода.

2<sup>0</sup> Точек самопересечения нет.

3<sup>0</sup> Имеем  $y'_x = \frac{2-5t^3}{4t^2}$ . Касательная параллельна оси ординат при  $t = 0$ . Касательная параллельна оси абсцисс при  $t = \sqrt[3]{2/5}$ , т. е. в точке  $M_1(0,2947; 0,3257)$ .

4<sup>0</sup> Находим  $y''_{xx} = -\frac{5t^3+4}{16t^6}$ . В окрестности нуля  $y''_{xx} < 0$ , т. е. кривая выпукла вверх. Так как  $y''_{xx} = 0$  при  $t = t_2 = -\sqrt[3]{4/5} \approx -0,92831$  и при  $t > t_2$  имеем  $y''_{xx} < 0$ , то кривая выпукла вверх; при  $t < t_2$  имеем  $y''_{xx} > 0$ , поэтому кривая выпукла вниз. Таким образом,  $M_2(0,7426; 1,55)$  — точка перегиба кривой.

5<sup>0</sup> Кривая не имеет асимптот.

6<sup>0</sup> Если  $t = 1$ , то  $y = 0$ ,  $x = 1$ . Таким образом,  $M_3(1; 0)$  — точка пересечения кривой с осью.

Кривая изображена на рис. 209.

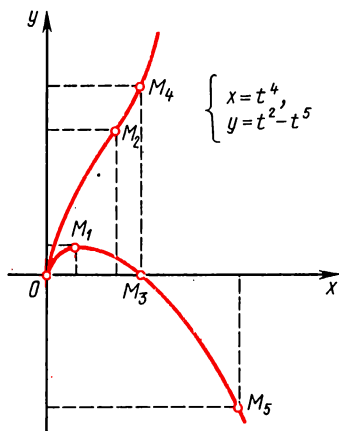


Рис. 209

З а м е ч а н и е 1. Отметим, что если  $t \rightarrow +\infty$ , то  $x = t^4 \rightarrow +\infty$ ,  $y \sim -t^5 \rightarrow -\infty$ . Таким образом,  $y \sim -x^{5/4}$  при  $x \rightarrow \infty$ . Если же  $t \rightarrow -\infty$ , то  $x = t^4 \rightarrow \infty$ ,  $y \sim -t^5 \rightarrow +\infty$ . В этом случае  $t = -\sqrt[4]{x}$  и  $y \sim x^{5/4}$  при  $x \rightarrow \infty$ .

З а м е ч а н и е 2. Кривая допускает представление в явном виде:  $y = \sqrt{x} \pm \sqrt[4]{x^5}$ . Если  $x \rightarrow 0$ , то  $y \sim \sqrt{x}$ , т. е. обе ветви графика сливаются в одну, образуя в начале координат точку возврата II рода.

---

6.  $x=t^2$ ,  $y=t^4+t^5$

---

1<sup>0</sup>. Находим  $x'_t = 2t$ ,  $y'_t = t^3(4+5t)$ . Так как  $\vec{r}' = 0$  при  $t = 0$  и  $\vec{r}'' = \{2; 12t^2 + 20t^3\}$

при  $t=0$ , то  $(0; 0)$  — особая точка. Далее, так как  $\vec{r}''' = \{0; 24t + 60t^2\}|_{t=0} = 0$ ,  $\vec{r}^{(IV)} = \{0; 24 + 120t\}|_{t=0} \neq 0$  и  $\vec{r}'' \nparallel \vec{r}^{(IV)}$  при  $t=0$ , то  $p=2$ ,  $q=4$ . Таким образом, начало координат является точкой возврата II рода.

2<sup>0</sup> Точек самопересечения нет.

3<sup>0</sup> Имеем  $y'_x = \frac{t^2(4+5t)}{2}$ . Касательная параллельна оси абсцисс при  $t=0$  и при  $t=-0,8$ , т. е. в начале координат и в точке  $M_1(0,64; 0,08)$ .

4<sup>0</sup> Находим  $y''_{xx} = \frac{(y'_x)'}{x} = \frac{8+15t}{4t}$ ;  $y''_{xx} = 0$  при  $t = -8/15$ . Если  $t < -8/15$ , то кривая выпукла вверх; если же  $t > -8/15$ , то кривая выпукла вниз. Таким образом,  $M_2(0,28; 0,038)$  — точка перегиба кривой.

5<sup>0</sup> Асимптот нет.

6<sup>0</sup> При  $t = -1$  имеем  $x = 1$ ,  $y = 0$ ; получаем точку  $M_3(1; 0)$ .

Кривая изображена на рис. 210.

З а м е ч а н и е 1. Отметим, что если  $t \rightarrow 0$ , то  $x = t^2 \rightarrow 0$ ,  $y = t^4 \rightarrow 0$ . Значит,  $y \sim x^2$  при  $x \rightarrow 0$ . Если же  $t \rightarrow \infty$ , то  $x = t^2 \rightarrow \infty$ ,  $y \sim t^5 \rightarrow \infty$ . Поэтому  $y \sim \pm x^{5/2}$  при  $x \rightarrow \infty$ .

З а м е ч а н и е 2. Кривая допускает представление в явном виде:  $y = x^2 \pm x^{5/2}$

**Примеры построения кривых в случае, когда  $x(t)$  и  $y(t)$  — дробно-рациональные функции аргумента  $t$ .** 1.  $x = \frac{t^5}{10(1-t)}$ ,  $y = t^3$

1<sup>0</sup> Находим  $x'_t = \frac{t^4(5-4t)}{10(1-t)^2}$ ,  $y'_t = 3t^2$ , т. е.  $\vec{r}'(t) = 0$  при  $t=0$ . Начало координат является особой точкой.

2<sup>0</sup> Точек самопересечения нет.

3<sup>0</sup> Имеем  $y'_x = \frac{30(1-t)^2}{t^2(5-4t)}$ . При  $t=0$  и  $t=5/4$ , т. е. в начале координат и в точке  $M_1(-1,22; 1,953)$ , касательная параллельна оси ординат.

4<sup>0</sup> Так как при  $t \rightarrow 0$  имеем  $x \sim \frac{1}{10}t^5$ ,  $y = t^3$ , то  $y \sim (10x)^{3/5}$ . Значит, начало координат есть точка перегиба ( $p=1$ ,  $q=3$ ).

5<sup>0</sup> Если  $t \rightarrow 1$ , то  $y'_x \rightarrow 0$ , а при этом  $x \rightarrow \infty$ . Поэтому кривая имеет горизонтальную асимптоту  $y=1$ .

Если же  $t \rightarrow \infty$ , то  $x \rightarrow \infty$ ,  $y \rightarrow \infty$ ,  $y/x \rightarrow 0$  и  $\lim_{t \rightarrow \infty} y = \infty$ ; поэтому при  $t \rightarrow \infty$  асимптоты нет.

Кривая изображена на рис. 211.

$$2. x = \frac{t^2}{1+t^2}, y = \frac{t^3}{1+t^2}.$$

1<sup>0</sup> Имеем  $x'_t = \frac{2t}{(1+t^2)^2}$ ,  $y'_t = \frac{t^2(t^2+3)}{(1+t^2)^2}$ , т. е.  $\vec{r}'(t) = 0$  при  $t=0$ . Таким образом, начало координат — особая точка. Далее, находим

$$x''_{tt} = \frac{2(1-3t^2)}{(1+t^2)^3}, y''_{tt} = \frac{2(t^4+2t^2+3)}{(1+t^2)^3},$$

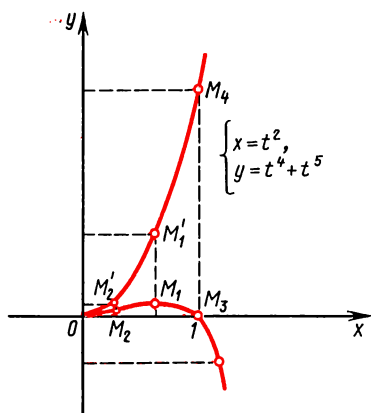


Рис. 210

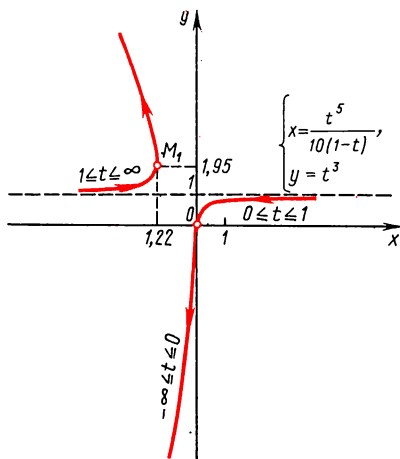


Рис. 211

т. е.  $x''_{ii}(0) = 2$ ;  $y''_{ii}(0) = 0$ . Так как  $\vec{r}''(0) = \{2; 0\}$ , то  $p = 2$ , а так как  $\vec{r}'''(0) = \{0; 6\}$ , то  $q = 3$ . Следовательно,  $(0; 0)$  является точкой возврата I рода.

2<sup>0</sup> Точек самопересечения нет.

3<sup>0</sup>. Найдем  $y'_x = \frac{t(t^2+3)}{2}$ . Так как  $y'_x = 0$  при  $t = 0$ , то касательная параллельна оси абсцисс в начале координат.

4<sup>0</sup> Имеем  $y''_{xx} = \frac{3}{4} \frac{(1+t^2)^3}{t}$ . При  $t > 0$  кривая выпукла вниз, а при  $t < 0$  — выпукла вверх. Точек перегиба нет.

5<sup>0</sup>. Если  $t \rightarrow \infty$ , то  $x \rightarrow 1$ ,  $y \rightarrow \infty$ . При этом  $y/x = t \rightarrow \infty$ . Таким образом, кривая имеет только вертикальную асимптоту  $x = 1$ .

6<sup>0</sup> Составим таблицу опорных точек, учитывая, что кривая симметрична относительно оси  $x$ :

	$t$	$x$	$y$	$y'$
0	0	0	0	0
$M_1$	0,5	0,2	0,1	1,08
$M_2$	1	1/2	1/2	2
$M_3$	2	4/5	8/5	7

Кривая изображена на рис. 212.

З а м е ч а н и е 1. Кривая допускает неявное представление в виде  $x(x^2 + y^2) = y^2$  и явное представление в виде  $y = \pm \frac{x^{3/2}}{\sqrt{1-x}}$ .

З а м е ч а н и е 2. Если  $t \rightarrow 0$ , то  $x \sim t^2$ ,  $y \sim t^3$ , т. е.  $y \sim \pm x^{3/2}$ ; если же  $t \rightarrow \infty$ , то  $x \sim 1 - \frac{1}{t^2}$ ,  $y \sim t$ , т. е.  $y \sim \pm \frac{1}{\sqrt{1-x}}$ .



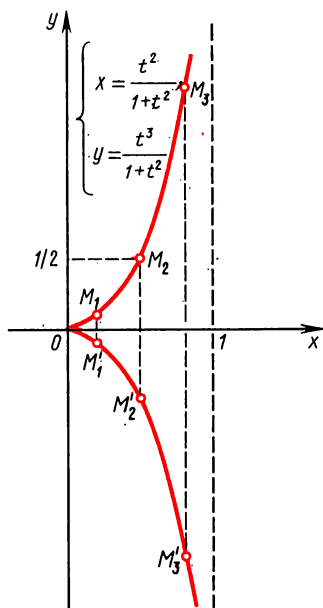


Рис. 212

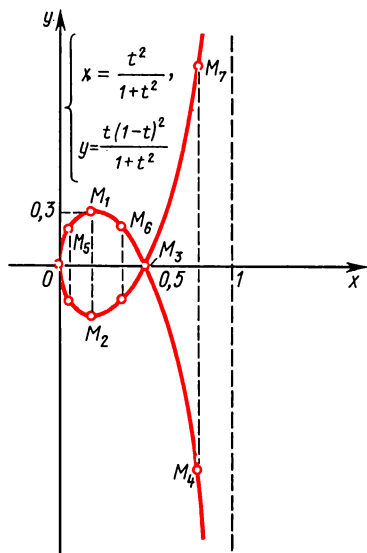


Рис. 213

---


$$3. \quad x = \frac{t^2}{1+t^2}, \quad y = \frac{t(1-t^2)}{1+t^2}.$$


---

1<sup>0</sup> Находим  $x' = \frac{2t}{(1+t^2)^2}$ ,  $y' = \frac{1-4t^2-t^4}{(1+t^2)^2}$ . Так как  $\vec{r}'(t) \neq 0$ , то кривая  $\vec{r}(t)$  не имеет особых точек.

2<sup>0</sup> Имеем  $\frac{t^2}{1+t^2} = \frac{t'^2}{1+t'^2}$ ,  $\frac{t'(1-t'^2)}{1+t'^2} = \frac{t(1-t^2)}{1+t^2}$ . Из первого уравнения следует  $t = -t'$ , а из второго уравнения получаем либо  $t = 0$ , что невозможно, либо  $t = 1$ ,  $t' = -1$ . Этим значениям соответствует одна и та же точка  $M_3(1/2; 0)$ , в которой угловые коэффициенты касательных различны:  $y'_x|_{t=1} = -2$ ,  $y'_x|_{t=-1} = 2$ . Таким образом, через точку  $M_3$  кривая проходит дважды. Эта точка является точкой самопересечения.

3<sup>0</sup>. Находим  $y'_x = \frac{1-4t^2-t^4}{2t}$ . Так как  $y'_x = 0$  при  $t = \pm\sqrt{\sqrt{5}-2} \approx \pm 0,485$ , то касательные параллельны оси абсцисс в точках  $M_1(0,19; 0,3)$  и  $M_2(0,19; -0,3)$ . Далее, поскольку  $y'_x \rightarrow \infty$  при  $t \rightarrow 0$ , касательная параллельна оси  $y$  в начале координат.

4<sup>0</sup> Имеем  $y''_{xx} = -\frac{(3t^4+4t^2+1)(1+t^2)^2}{2t^3}$ , т. е.  $y''_{xx} \neq 0$  ни при каком значении  $t$ . Если  $t < 0$ , то кривая выпукла вниз, а если  $t > 0$  — выпукла вверх. Однако при  $t = 0$  точки перегиба нет, так как касательная па-

параллельна оси ординат, но  $x''_{yy} = -\frac{(1+t^2)^2(2+8t^2+6t^4)}{(t^4+4t^2-1)^3} \Big|_{t=0} > 0$ . и, значит, кривая обращена выпуклостью в отрицательную сторону оси абсцисс.

5°. Если  $t \rightarrow +\infty$ , то  $x \rightarrow 1$ ,  $y \rightarrow -\infty$ ; если же  $t \rightarrow -\infty$ , то  $x \rightarrow 1$ ,  $y \rightarrow +\infty$ . При этом  $\frac{y}{x} = \frac{1-t^2}{t} \rightarrow \infty$ . Таким образом, кривая имеет только вертикальную асимптоту  $x = 1$ .

6°. Кривая симметрична относительно оси  $x$ .

Кривая изображена на рис. 213.

З а м е ч а н и е 1. Кривая допускает представление в явном виде:

$$y = \pm(1-2x)\sqrt{\frac{x}{1-x}}.$$

З а м е ч а н и е 2. Если  $t \rightarrow 0$ , то  $x \sim t^2$ ,  $y \sim t$ , откуда  $y \sim \pm\sqrt{x}$ ; если  $t \rightarrow 1$ , то  $x \sim \frac{1}{2}t$ ,  $y \sim 1-t$ , откуда  $y \sim 1-2x$ ; если  $t \rightarrow -1$ , то  $x \sim -\frac{1}{2}t$ ,  $y \sim -(1+t)$ , откуда  $y \sim -1+2x$ . Чтобы получить эти представления, нужно разложить функции  $x(t)$  и  $y(t)$  в степенные ряды в окрестности точек  $t = 1$  и  $t = -1$  и ограничиться первыми членами. Наконец, если  $t \rightarrow \infty$ , то  $x \sim 1 - \frac{1}{t^2}$ ,  $y \sim t$ , откуда  $y \sim \pm \frac{1}{\sqrt{1-x}}$ .

$$4. x = \frac{t^2}{1-t^2}, y = \frac{1}{1+t^2}.$$

1°. Находим  $x'_t = \frac{2t}{(1-t^2)^2}$ ,  $y'_t = -\frac{2t}{(1+t^2)^2}$ . Так как  $x'_t = 0$  и  $y'_t = 0$  при  $t = 0$  и при  $t \rightarrow \infty$ , то  $M_0(0; 1)$  и  $M_1(-1; 0)$  — особые точки.

2°. Имеем  $\frac{t^2}{1-t^2} = \frac{t'^2}{1-t'^2}$ ,  $\frac{1}{1+t^2} = \frac{1}{1+t'^2}$ . Все точки кривой пробегаются дважды. Концевые точки кривой достигаются при  $t = 0$  и  $t = \infty$ .

3°. Находим  $y'_x = -\frac{(1-t^2)^2}{(1+t^2)^2}$ . Если  $t \rightarrow \infty$ , то  $y'_x \rightarrow -1$ , а если  $t \rightarrow 0$ , то  $y'_x \rightarrow -1$ . Так как  $y'_x$  отлична от нуля при всех  $t$  таких, что  $|t| \neq 1$ , то касательных, параллельных осям координат, нет.

4°. Имеем  $y''_{xx} = \frac{4(1-t^2)^3}{(1+t^2)^3}$ . При  $|t| > 1$  кривая выпукла вверх, а при  $|t| < 1$  — выпукла вниз.

5°. Если  $|t| \rightarrow 1$ , то  $x \rightarrow \infty$ ,  $y \rightarrow 1/2$ . Значит,  $y = 1/2$  — горизонтальная асимптота.

Кривая изображена на рис. 214.

$$5. x = \frac{t^2}{t-1}, y = \frac{t}{t^2-1}.$$

1° Находим  $x'_t = \frac{t^2-2t}{(t-1)^2}$ ,  $y'_t = -\frac{t^2+1}{(t^2-1)^2}$ . Так как  $\bar{r}'(t) \neq 0$ , то особых точек нет.

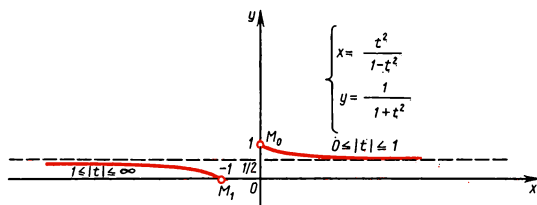


Рис. 214

2°. Имеем  $\frac{t^2}{t-1} = \frac{t'^2}{t'-1}$ ,  $\frac{t'}{t'^2-1} = \frac{t}{t^2-1}$ , откуда  $t = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ ,  $t' = -\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ .

Точка самопересечения  $M_0(-1; -1)$ . Найдем угловые коэффициенты касательных:

$$y'_x \Big|_{t=(\sqrt{5}-1)/2} = -\frac{t^2+1}{(t+1)^2(t^2-2t)} \Big|_{t=(\sqrt{5}-1)/2} = 0,45084;$$

$$y'_x \Big|_{t=-(\sqrt{5}+1)/2} = -55,45.$$

3°. Так как  $y'_x = \infty$  при  $t = 0$  и  $t = 2$ , то в точках  $(0; 0)$  и  $(4; 2/3)$  касательная параллельна оси ординат.

4°. Находим

$$y''_{xx} = -\frac{2(t-1)^3(t^4+t^3+3t^2+4t+1)}{t^2(t-2)^2(t+1)^2} = -\frac{2(t-1)^3(t^3+3t+1)}{t^2(t-2)(t+1)};$$

$$y''_{xx} = 0 \text{ при } t = -0,3222.$$

При  $1 < t < 2$  и  $-1 < t < -0,32$  кривая выпукла вниз, а при  $t > 2$ ,  $0 < t < 1$ ;  $-0,32 < t < 0$  и  $t < -1$  — выпукла вверх. Точка перегиба имеет координаты  $(-0,0785; 0,3595)$ .

5°. Если  $t \rightarrow -1$ , то  $x \rightarrow -1/2$ ,  $y \rightarrow \infty$ ,  $y/x \rightarrow \infty$ ; получаем вертикальную асимптоту  $x = -1/2$ .

Если  $t \rightarrow 1$ , то  $x \rightarrow \infty$ ,  $y \rightarrow \infty$ ,  $\frac{y}{x} \rightarrow \frac{1}{2}$ ,  $\lim_{t \rightarrow 1} \left( y - \frac{1}{2}x \right) = \frac{1}{4}$ . Таким

образом, имеется наклонная асимптота  $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$ .

Если  $t \rightarrow \infty$ , то  $x \rightarrow \infty$ ,  $y \rightarrow \infty$ ,  $y/x \rightarrow 0$ , т. е. существует горизонтальная асимптота  $y = 0$ .

Кривая изображена на рис. 215.

$$6. x = \frac{t^2}{1-t}, y = \frac{t^3}{1-t^2}.$$

1°. Функции  $x(t)$  и  $y(t)$  определены и дифференцируемы всюду, кроме точек  $t = 1$ ,  $t = -1$ . Находим:

$$x'_t = \frac{t(2-t)}{(1-t)^2}, y'_t = \frac{t^2(3-t^2)}{(1-t^2)^2}, \text{ т. е. } \vec{r}'(t) = 0 \text{ при } t = 0;$$

$$x''_t = \frac{2}{(1-t)^3}, \quad y''_t = \frac{2t(3-2t^2+t^4)}{(1-t^2)^3}, \quad x''_t(0) = 2, \quad y''_t(0) = 0, \quad \text{т. е. } p = 2;$$

$$x'''_t = \frac{6}{(1-t)^4} \Big|_{t=0} = 6, \quad y'''_t(0) = 6, \quad \text{т. е. } q = 3.$$

Итак, начало координат есть точка возврата I рода.

2<sup>0</sup> Точек самопересечения нет.

3<sup>0</sup> Находим  $y'_x = \frac{t(3-t^2)}{2-t}$ . Значит, касательная параллельна оси абсцисс при  $t = 0$ ,  $t = \pm\sqrt{3}$  и параллельна оси ординат при  $t = 2$ , т. е. в точках  $(0; 0)$ ,  $(-4, 1; -2, 6)$ ,  $(1, 1; 2, 6)$ ,  $(-4; -8/3)$ .

4<sup>0</sup> Имеем  $y''_{xx} = \frac{2(3+t^2)}{(1-t)(1+t)^3(2-t)}$ , т. е. кривая выпукла вниз при  $t > 2$  и  $-1 < t < 1$  и выпукла вверх при  $t < -1$  и  $1 < t < 2$ . Точек перегиба нет.

5<sup>0</sup> Если  $t \rightarrow \infty$ , то  $x \rightarrow \infty$ ,  $y \rightarrow \infty$ . При этом  $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{y}{x} = 1$ ,  $\lim_{t \rightarrow \infty} (y - x) = 1$ . Таким образом, кривая имеет наклонную асимптоту  $y = x + 1$ .

Если  $t \rightarrow -1$ , то  $x \rightarrow 1/2$  и  $y \rightarrow \infty$ . Значит, кривая имеет вертикальную асимптоту  $x = 1/2$ .

Если  $t \rightarrow 1$ , то  $x \rightarrow \infty$ ,  $y \rightarrow \infty$ . При этом

$$\frac{y}{x} \rightarrow \frac{1}{2}, \quad \lim_{t \rightarrow 1} \left( y - \frac{1}{2}x \right) = \lim_{t \rightarrow 1} \left( \frac{t^3}{1-t^2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{t^2}{1-t} \right) = -\frac{1}{4}.$$

Итак, кривая имеет еще одну наклонную асимптоту  $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$ .

Кривая изображена на рис. 216.

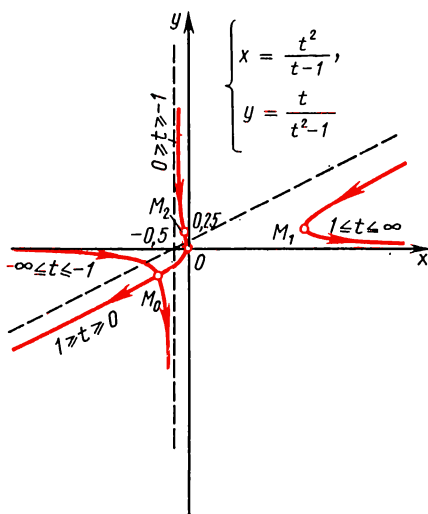


Рис. 215

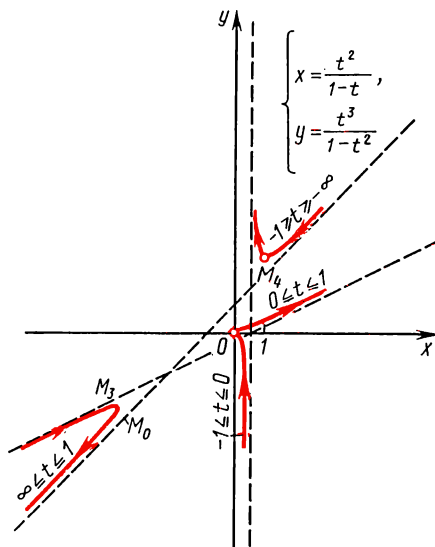


Рис. 216

---


$$7. x = \frac{2t}{1-t^2}, y = \frac{t^2}{1-t^2}.$$


---

1<sup>0</sup>. Имеем  $x'_t = \frac{2(1+t^2)}{(1-t^2)^2}$ ,  $y'_t = \frac{2t}{(1-t^2)^2}$ . Если  $t \rightarrow \infty$ , то  $x'_t \rightarrow 0$ ,  $y'_t \rightarrow 0$ ; точка  $(0; -1)$  — особая.

2<sup>0</sup> Точек самопересечения нет.

3<sup>0</sup> Так как  $y'_x = \frac{t}{1+t^2}$ , то при  $t = 0$  и  $t = \infty$ , т.е. в точках  $(0; 0)$ ,  $(0; -1)$ , касательная параллельна оси абсцисс.

4<sup>0</sup>. Находим  $y''_{xx} = \frac{(1-t^2)^3}{2(1+t^2)^3}$ . При  $|t| > 1$  кривая выпукла вверх, а при  $|t| < 1$  — выпукла вниз. Точек перегиба нет.

5<sup>0</sup> Если  $t \rightarrow 1$ , то  $x \rightarrow \infty$ ,  $y \rightarrow \infty$ ,  $\frac{y}{x} = \frac{t}{2} \rightarrow \frac{1}{2}$ ,  $\lim_{t \rightarrow 1} \left( y - \frac{1}{2}x \right) = -\frac{1}{2}$ , т.е.  $y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$  — наклонная асимптота.

Если  $t \rightarrow -1$ , то  $x \rightarrow \infty$ ,  $y \rightarrow \infty$ ,  $\frac{y}{x} = \frac{t}{2} = -\frac{1}{2}$ ,  $\lim_{t \rightarrow -1} \left( y + \frac{1}{2}x \right) = -\frac{1}{2}$ , т.е.  $y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$  — также наклонная асимптота.

6<sup>0</sup> Кривая симметрична относительно оси ординат.

Кривая изображена на рис. 217.

---

$$8. x = \frac{t^2}{1-t^2}, y = \frac{t^3}{1-t^2}.$$


---

1<sup>0</sup> Находим  $x'_t = \frac{2t}{(1-t^2)^2}$ ,  $y'_t = \frac{t^2(3-t^2)}{(1-t^2)^2}$ , т.е.  $\vec{r}'(t) = 0$  при  $t = 0$ . Таким образом, начало координат является особой точкой.

Так как при  $t \rightarrow 0$  имеем  $x \approx t^2$ , а  $y \approx t^3$ , то  $y \approx \pm x^{3/2}$ , т.е. начало координат есть точка возврата I рода.

2<sup>0</sup>. Точек самопересечения нет.

3<sup>0</sup> Имеем  $y'_x = \frac{t(3-t^2)}{2}$ . Поэтому касательные параллельны оси абсцисс при  $t = 0$ ,  $t = \pm\sqrt{3}$ , т.е. в начале координат и в точках  $(-3/2; -3\sqrt{3}/2)$ ,  $(-3/2; 3\sqrt{3}/2)$ .

4<sup>0</sup> Находим  $y''_{xx} = \frac{3(1-t^2)^3}{4t}$ . Если  $t = 0$ , то  $y''_{xx}$  не существует, но точки перегиба нет. Если же  $t = \pm 1$ , то  $y''_{xx} = 0$ , но точек перегиба также нет, поскольку  $x \rightarrow \infty$ ,  $y \rightarrow \infty$  при  $t \rightarrow 1$  и  $t \rightarrow -1$ .

5<sup>0</sup>. Если  $t \rightarrow +\infty$ , то  $x \rightarrow -1$ ,  $y \rightarrow -\infty$ ; если же  $t \rightarrow -\infty$ , то  $x \rightarrow -1$ ,  $y \rightarrow +\infty$ . Таким образом,  $x = -1$  является вертикальной асимптотой.

Если  $t \rightarrow 1$ , то  $x \rightarrow \infty$ ,  $y \rightarrow \infty$  и  $\frac{y}{x} = t \rightarrow 1$ ,  $\lim_{t \rightarrow 1} (y - x) = -\frac{1}{2}$ . Аналогично, если  $t \rightarrow -1$ , то  $x \rightarrow \infty$ ,  $y \rightarrow \infty$  и  $y/x = t = -1$ ,  $\lim_{t \rightarrow -1} (y + x) = 1/2$ .

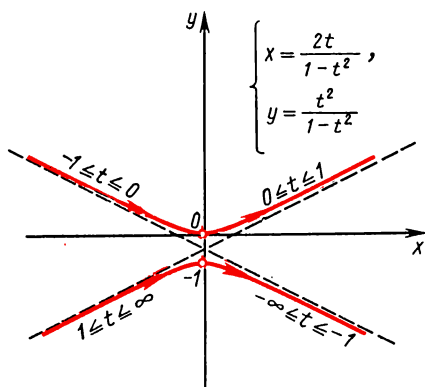


Рис. 217.

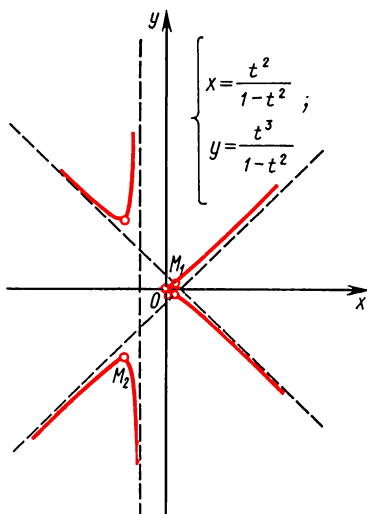


Рис. 218

Итак, имеются наклонные асимптоты  $y = x - 0,5$  и  $y = -x + 0,5$ .

6<sup>0</sup> Кривая симметрична относительно оси  $x$ .

Кривая изображена на рис. 218.

---

9.  $x = \frac{3at}{1+t^3}$ ,  $y = \frac{3at^2}{1+t^3}$  ( $a > 0$ ).

---

1<sup>0</sup> Производные  $x'_t = \frac{3a(1-2t^3)}{(1+t^3)^2}$ ,  $y'_t = \frac{3at(2-t^3)}{(1+t^3)^2}$  обращаются в нуль одновременно только при  $t = \pm\infty$ , так что начало координат является особой точкой.

2<sup>0</sup>. Имеем  $\frac{3at}{1+t^3} = \frac{3at'}{1+t'^3}$ ,  $\frac{3at^2}{1+t^3} = \frac{3at'^2}{1+t'^2}$ . Решая эту систему, найдем  $t = 1/t'$ . Подставляя полученное значение в любое из уравнений, заключаем, что система не имеет действительных решений. Остается одна возможность:  $t' = \infty$ ,  $t = 0$ . Действительно, если  $t = 0$ , то  $x = 0$ ,  $y = 0$ , а если  $t \rightarrow \infty$ , то  $x \rightarrow 0$ ,  $y \rightarrow 0$ . Таким образом, начало координат есть точка самопересечения.

3<sup>0</sup> Здесь  $y'_x = \frac{t(2-t^3)}{1-2t^3}$ . Касательная параллельна оси абсцисс при  $t = \sqrt[3]{2}$ , т. е. в точке  $(a\sqrt[3]{2}; a\sqrt[3]{4})$ , и при  $t = 0$ , т. е. в точке  $(0; 0)$ .

Касательная параллельна оси ординат при  $t = 1/\sqrt[3]{2}$ , т. е. в точке  $(a\sqrt[3]{4}; a\sqrt[3]{2})$ .

4<sup>0</sup> Находим  $y''_{xx} = \frac{2(1+t^3)^4}{3a(1-2t^3)^3}$ ,  $x''_{yy} = \frac{-2(1-t^3)^2(1+t^3)^2}{3at^3(2-t^3)^3}$ . Кривая выпукла вверх при  $t > 1/\sqrt[3]{2}$  и выпукла вниз при  $t < 1/\sqrt[3]{2}$ . Однако при  $t = 1/\sqrt[3]{2}$  точки перегиба нет, так как если  $t \rightarrow 1/\sqrt[3]{2}$ , то  $y'_x \rightarrow \infty$  и нужно рассмотреть

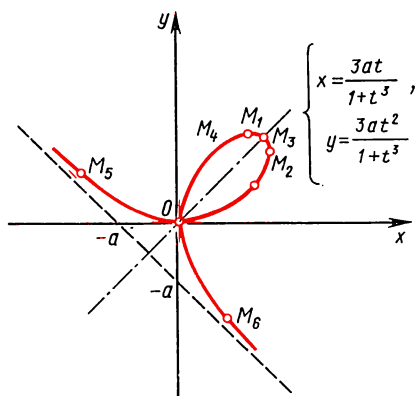


Рис. 219

$x = \varphi(y)$ . Поскольку  $x''_{yy}|_{t=1/\sqrt[3]{2}} < 0$ , кривая обращена выпуклостью в положительную сторону оси абсцисс. Аналогично получаем, что при  $t \rightarrow \infty$  кривая обращена выпуклостью в отрицательную сторону оси абсцисс. Точки перегиба в начале координат нет.

5<sup>0</sup> Если  $t \rightarrow -1$ , то  $x \rightarrow \infty$ ,  $y \rightarrow \infty$ ,  $y/x \rightarrow -1$  и  $\lim_{t \rightarrow -1} (y+x) = -a$ . Таким образом, кривая имеет наклонную асимптоту  $x+y+a=0$ .

Кривая изображена на рис. 219.

З а м е ч а н и е 1. Кривая допускает неявное представление в виде  $x^3 + y^3 - 3axy = 0$ , откуда сразу следует,

что она симметрична относительно биссектрисы I и III координатных углов.

З а м е ч а н и е 2. Если  $t \rightarrow 0$ , то  $x = 3at$ ,  $y = 3at^2$ , откуда  $y \sim \frac{x^2}{3a}$ , т. е. в начале координат кривая ведет себя как парабола

$y = \frac{1}{3a}x^2$ . Если  $t \rightarrow \infty$ , то  $x \sim \frac{3a}{t^2}$ ,  $y \sim \frac{3a}{t}$ , откуда  $x = \frac{y^2}{3a}$  т. е.

при  $t \rightarrow \infty$  кривая ведет себя как парабола  $y^2 = 3ax$ . Другими словами, точка самопересечения выглядит как точка пересечения двух парабол, оси симметрии которых совпадают с осями координат.

$$10. x = \frac{t}{1-t^2}, y = \frac{t(1-2t^2)}{1-t^2}.$$

1<sup>0</sup> Имеем  $x'_t = \frac{1+t^2}{(1-t^2)^2}$ ,  $y'_t = \frac{1-5t^2+2t^4}{(1-t^2)^2}$ . Так как  $x'_t$  и  $y'_t$  не обращаются в нуль одновременно, то кривая не имеет особых точек, т. е. регулярна для всех значений  $t$ , за исключением точек  $t = \pm 1$ , в которых она не определена.

2<sup>0</sup> Точек самопересечения нет.

3<sup>0</sup> Находим  $y'_x = \frac{1-5t^2+2t^4}{1+t^2}$ , откуда  $y'_x = 0$  при  $t_{1,2} = \pm 0,4682$ ;  $t_{3,4} = \pm 1,5102$ .

Касательная параллельна оси абсцисс при  $t = 0,4682$ ;  $-0,4682$ ;  $1,5102$ ;  $-1,5102$ ; т. е. в точках  $(0,5996; 0,3367)$ ,  $(-0,5996; -0,3367)$ ,  $(-1,1791; 4,1995)$ ,  $(1,1791; -4,1995)$ .

4<sup>0</sup> Кривая имеет точку перегиба в начале координат. Заметим, что если  $t \rightarrow 0$ , то  $x \sim t$ ,  $y \sim t$ , т. е.  $y \sim x$ . Далее находим  $y''_{xx} = \frac{-4t(1-t^2)^3(t^2+3)}{(1+t^2)^3}$ , поэтому при  $0 < t < 1$  кривая выпукла вверх, а при  $t > 1$  — выпукла вниз.

5<sup>0</sup> Если  $t \rightarrow \infty$ , то  $x \rightarrow 0$ ,  $y \rightarrow \infty$ ,  $\lim_{t \rightarrow \infty} y/x = \lim_{t \rightarrow \infty} (1-2t^2) = -\infty$ . Таким образом, ось ординат служит вертикальной асимптотой.

Если  $t \rightarrow 1$ , то  $x \rightarrow \infty$ ,  $y \rightarrow \infty$ ,  $y/x \rightarrow -1$  и  $\lim_{t \rightarrow 1} (y + x) = 2$ . Значит, кривая имеет наклонную асимптоту  $x + y - 2 = 0$ . Аналогично, если  $t \rightarrow -1$ , то  $x \rightarrow \infty$ ,  $y \rightarrow \infty$ ,  $y/x \rightarrow -1$ ,  $\lim_{t \rightarrow -1} (y + x) \rightarrow -2$ , т. е. существует еще одна наклонная асимптота  $x + y + 2 = 0$ .

6°. Кривая симметрична относительно начала координат.

Кривая изображена на рис. 220.

$$11. x = \frac{5t^2}{1+t^5}, y = \frac{5t^3}{1+t^5}.$$

1°. Находим  $x'_t = \frac{5t(2-3t^5)}{1+t^5}$ ,  $y'_t = \frac{5t^2(3-2t^5)}{1+t^5}$ . Кривая регулярна при всех  $t$ , кроме  $t=0$  (при этом значении  $\vec{r}'(t)=0$ ) и  $t=-1$  (поскольку  $x(t)$  и  $y(t)$  разрывны в этой точке).

Если  $t \rightarrow 0$ , то  $x \sim 5t^2$ ,  $y \sim 5t^3$ ; поэтому  $y \sim \pm(1/\sqrt{5})x^{3/2}$ . Отсюда следует, что начало координат есть точка возврата 1 рода.

Если  $t \rightarrow \infty$ , то  $x \sim 5/t^3$ ,  $y \sim 5/t^2$ , откуда  $x \sim \pm(1/\sqrt{5})y^{3/2}$ . Кривая выходит из начала координат, касаясь оси ординат при  $t = \pm\infty$ .

2°. Точек самопересечения нет.

3°. Имеем  $y'_x = \frac{t(3-2t^5)}{2-3t^5}$ . Касательная параллельна оси абсцисс при

$t=0$  и при  $t = \sqrt[5]{1,5} = 1,0844$ , т. е. в точках  $(0; 0)$  и  $M_2(2,3521; 2,5508)$ . Касательная параллельна оси ординат при  $t = \sqrt[3]{2/3} = 0,9221$ , т. е. в точке  $M_1(2,5508; 2,3521)$ , и при  $t = \pm\infty$ , т. е. в начале координат.

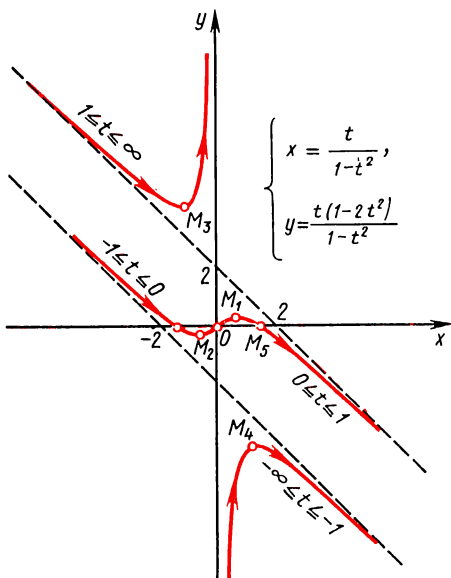


Рис. 220

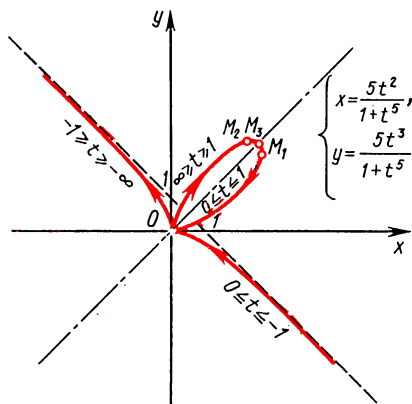


Рис. 221



4<sup>0</sup> Находим  $y''_{xx} = \frac{6(t^5+1)^3}{5t(2-3t^5)^3}$ . При  $t < -1$  и  $0 < t < 0,9221$  кривая выпукла вниз, а при  $-1 < t < 0$  и при  $t > 0,9221$  — выпукла вверх. При  $t = 0,9221$  касательная параллельна оси ординат, поэтому следует рассмотреть  $x''_{yy} = -\frac{6(t^5+1)^3}{5t^4(3-2t^5)^3} \Big|_{t=\sqrt[5]{2/3}} < 0$ . Таким образом, кривая обращена выпуклостью в положительную сторону оси абсцисс. Точек перегиба нет.

5<sup>0</sup> Если  $t \rightarrow -1$ , то  $x \rightarrow \infty$ ,  $y \rightarrow \infty$ ,  $y/x \rightarrow -1$ ,  $\lim_{t \rightarrow -1} (y+x) = 1$ . Таким образом, кривая имеет наклонную асимптоту  $y+x-1=0$ .

6<sup>0</sup> Так как  $y/x = t$ , то уравнение кривой можно записать в виде  $x^5 + y^5 = 5x^2y^2$ . Это уравнение не меняется при замене  $x$  на  $y$ , а  $y$  на  $x$ . Отсюда следует, что кривая симметрична относительно биссектрисы I и III координатных углов, т. е. относительно прямой  $y=x$ . Заметим, что если  $t=1$ , то  $y=x=2,5$ , откуда получаем точку  $M_3(2,5; 2,5)$ .

Кривая изображена на рис. 221.

$$12. x = \frac{(t+2)^2}{t+1}, y = \frac{(t-2)^2}{t-1}.$$

1<sup>0</sup> Имеем  $x'_t = \frac{t(t+2)}{(t+1)^2}$ ,  $y'_t = \frac{t(t-2)}{(t-1)^2}$ ,  $\bar{r}'(t) = 0$  при  $t=0$ , т. е. (4; -4) — особая точка кривой. Далее, находим

$$x''_{tt} = \frac{2}{(t+1)^3}, y''_{tt} = \frac{2}{(t-1)^3}, \bar{r}''(0) = \{2; -2\} \neq 0, \text{ т. е. } p=2;$$

$$x'''_{ttt} = -\frac{6}{(t+1)^4}, y'''_{ttt} = -\frac{6}{(t-1)^4}, \bar{r}'''(0) = \{-6; -6\}, \text{ т. е. } q=3, \\ \text{поскольку } \bar{r}'''(0) \nparallel \bar{r}''(0).$$

Итак, при  $t=0$  кривая имеет точку возврата I рода. Так как  $y'_x = \frac{t^3-3t-2}{t^3-3t+2}$ , то  $y'_x|_{t=0} = -1$  и уравнение касательной к кривой в особой точке имеет вид  $y+x=0$ .

2<sup>0</sup> Точек самопересечения нет.

3<sup>0</sup> Здесь  $y'_x = 0$  при  $t=2$ , т. е. в точке  $M_1(5,3333; 0)$  касательная параллельна оси абсцисс;  $y'_x = \infty$  при  $t=-2$ , т. е. в точке  $M_2(0; -5,3333)$  касательная параллельна оси ординат.

4<sup>0</sup> Находим  $y''_{xx} = 12 \frac{(t+1)^3}{t(t+2)^2(t-1)}$ . Так как  $y''_{xx}$  не существует при  $t=-2$ , т. е. в точке  $M_2(0; -5,3333)$ , а в этой точке касательная параллельна оси ординат, то следует рассмотреть  $x = \varphi(y)$ . Имеем

$$x''_{yy} = -\frac{12(t-1)^3}{t(t+1)(t-2)^2}, x''_{yy}|_{t=-2} = 10,125 > 0.$$

В рассматриваемой точке кривая обращена выпуклостью в отрицательную сторону оси абсцисс. Точек перегиба нет.

5<sup>0</sup>. Если  $t \rightarrow -1$ , то  $x \rightarrow \infty$ ,  $y \rightarrow 4,5$ ; кривая имеет горизонтальную асимптоту  $y = -4,5$ . Далее, если  $t \rightarrow 1$ , то  $x \rightarrow 4,5$ ,  $y \rightarrow \infty$ , т. е. кривая имеет

вертикальную асимптоту  $x = 4,5$ . Наконец, если  $t \rightarrow \infty$ , то  $x \rightarrow \infty$ ,  $y \rightarrow \infty$  и  $y/x \rightarrow 1$ ,  $\lim_{t \rightarrow \infty} (y-x) = -6$ . Поэтому кривая имеет наклонную асимптоту  $y-x+6=0$ .

6<sup>0</sup>. Кривая симметрична относительно прямой  $y = -x$ , так как замена  $t$  на  $-t$  приводит к замене  $x$  на  $-y$ , а  $y$  на  $-x$ .

Кривая изображена на рис. 222.

$$13. x = \frac{4t}{1-t^4}, y = \frac{4t^2}{1-t^4}.$$

1<sup>0</sup>. Имеем  $x'_t = \frac{12t^4+4}{(1-t^4)^2}$ ,  $y'_t = \frac{8t(1+t^4)}{(1-t^4)^2}$ ; так как  $x'_t = 0$ ,  $y'_t = 0$  при  $t = \pm \infty$ , то начало координат является особой точкой.

Если  $t \rightarrow \infty$ , то  $x \sim -\frac{4}{t^3}$ ,  $y \sim -\frac{4}{t^2}$ , т. е.  $x \sim \pm \frac{1}{2}(-y)^{3/2}$ . Далее, находим  $y'_x = \frac{2t(1+t^4)}{3t^4+1} \rightarrow \infty$  при  $t \rightarrow \infty$ , т. е. касательная параллельна оси ординат. Если  $t = 0$ , то  $x = 0$  и  $y = 0$ ,  $y'_x = 0$ , т. е. касательная параллельна оси абсцисс.

Таким образом, начало координат является тройной особой точкой. Действительно, так как  $y/x = t$ , то уравнение кривой можно записать в виде  $F(x, y) = x^4 - y^4 - 4yx^2 = 0$ . Тогда при  $x = 0$ ,  $y = 0$  получим  $F''_{xx} = F''_{yy} = F''_{xy} = 0$ , но  $F'''_{xxx} = 24x - 8|_{x=0} \neq 0$  (см. ниже § 3).

2<sup>0</sup>. Точек самопересечения нет.

3<sup>0</sup>. При  $t = 0$  касательная совпадает с осью абсцисс, а при  $t = \pm \infty$  касательная совпадает с осью ординат.

4<sup>0</sup>. Находим  $y''_{xx} = \frac{(1-4t^4+3t^8)(1-t^4)^2}{2(3t^4+1)^3}$ . Так как  $y''_{xx} = 0$  при  $t = \pm 1/\sqrt[4]{3} = \pm 0,7558$ , то в точках  $M_1(2\sqrt[4]{27}; 2\sqrt[4]{3})$  и  $M_2(-2\sqrt[4]{27}; 2\sqrt[4]{3})$  или  $M_1(4,559; 3,4641)$  и  $M_2(-4,559; 3,4641)$  кривая имеет перегиб. Действительно,  $y''_{xx} > 0$  при  $0 < t < 1/\sqrt[4]{3}$  и при  $t > 1$ , т. е. на этих интервалах кривая выпукла вниз, а при  $1/\sqrt[4]{3} < t < 1$  кривая выпукла вверх.

5<sup>0</sup> Если  $t \rightarrow 1$ , то  $x \rightarrow \infty$ ,  $y \rightarrow \infty$ ,  $y/x \rightarrow 1$ ,  $\lim_{t \rightarrow 1} (y-x) = 1$ , т. е. кривая имеет наклонную асимптоту  $y = x + 1$ . Аналогично получаем, что при  $t \rightarrow -1$  кривая имеет другую наклонную асимптоту  $y = -x - 1$ .

6<sup>0</sup> Так как замена  $t$  на  $-t$

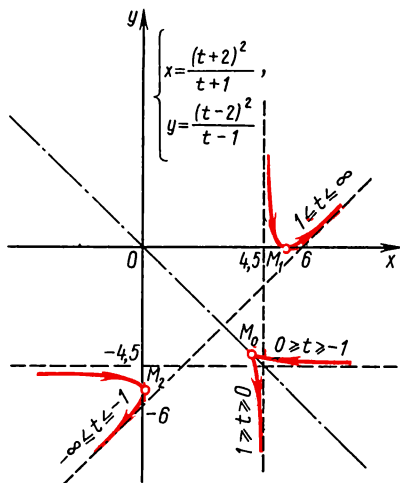


Рис. 222

приводит к замене  $x$  на  $-x$ , а  $y$  не меняется, то кривая симметрична относительно оси ординат. Поэтому достаточно рассмотреть лишь положительные значения  $t$ .

Отметим, что если  $t \rightarrow 0$ , то  $x \sim 4t$ ,  $y \sim 4t^2$ , т. е.  $y \sim x^2/4$ .

Кривая изображена на рис. 223.

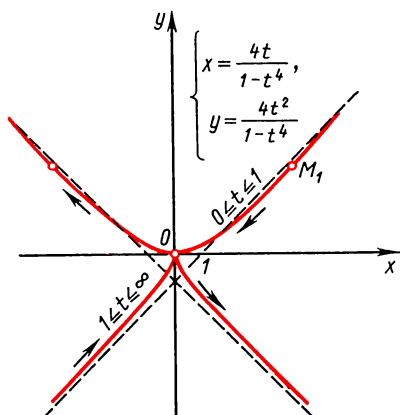


Рис. 223

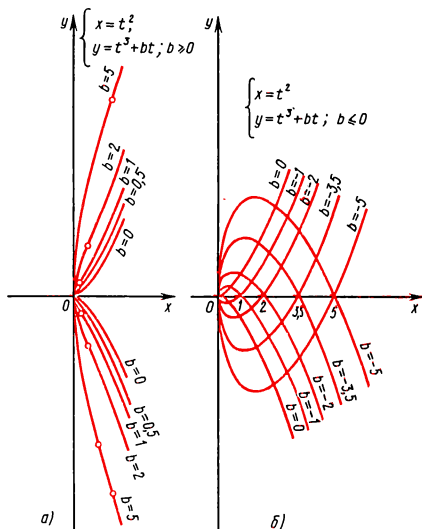


Рис. 224

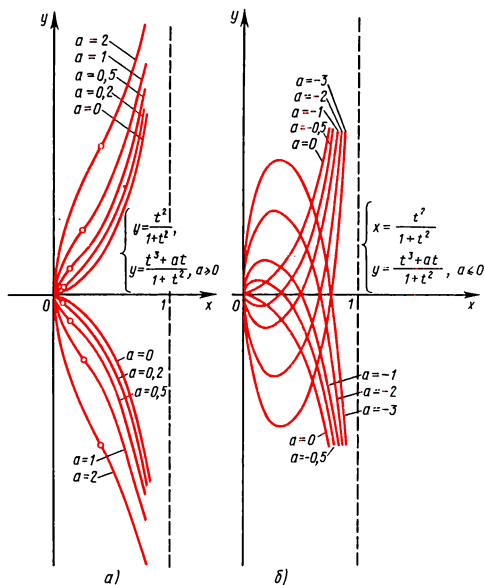


Рис. 225

В приложениях и инженерных расчетах часто используются так называемые «сетки» графиков функций, представляющие собой, по существу, однопараметрические семейства кривых.

Рассмотрим, например, семейство кривых  $x = t^2$ ,  $y = t^3 + bt$ , где  $b$  — некоторый параметр.

Прежде всего отметим, что кривая симметрична относительно оси абсцисс.

В случае  $b \geq 0$  она имеет точки перегиба при  $t = \pm\sqrt{b/3}$ , т. е. при  $x = b/3$ . При увеличении  $b$  точка перегиба смещается вправо, а при  $b = 0$  кривая превращается в полукубическую параболу (рис. 224, а).

В случае  $b \leq 0$  точки перегиба нет, но имеется точка самопересечения при  $t = \pm\sqrt{-b}$ , т. е. при  $x = -b$ ,  $y = 0$ . При уменьшении  $b$  точка самопересечения перемещается вправо (рис. 224, б).

Рассмотрим еще семейство кривых  $x = \frac{t^2}{1+t^2}$ ,  $y = \frac{t^3+at}{1+t^2}$ , где  $a$  — некоторый параметр.

Кривая симметрична относительно оси абсцисс и имеет вертикальную асимптоту.

В случае  $a > 0$  кривая имеет точки перегиба при  $t = \pm\sqrt{a/3}$  (рис. 225, а), а в случае  $a \leq 0$  — точку самопересечения при  $t = \pm\sqrt{a}$  (рис. 225, б).

### § 3. Кривые, заданные неявными уравнениями

Если в некоторой области  $D \in \mathbb{R}^2$  функция  $F(x, y)$  имеет непрерывные частные производные первого порядка, то через каждую точку  $M(x, y)$ , координаты которой удовлетворяют уравнению

$$F(x, y) = 0, \quad (1)$$

проходит (и только одна) простая дуга кривой, координаты каждой точки которой удовлетворяют тому же уравнению при условии, что частные производные  $F'_x$ ,  $F'_y$  в точке  $M$  не равны нулю одновременно.

Точки области  $D$ , в которых удовлетворяются уравнения

$$F(x, y) = 0, \quad F'_x(x, y) = 0, \quad F'_y(x, y) = 0, \quad (2)$$

называют *особыми точками*.

Точки, в которых  $F'_x$ ,  $F'_y$  не обращаются в нуль одновременно, называют *обыкновенными*. Если в точке  $M_0(x_0, y_0)$  обращаются в нуль, кроме самой функции, обе ее частные производные первого порядка, но не все производные второго порядка равны нулю, то  $M_0(x_0, y_0)$  называются *двойной особой точкой*.

Если имеют место условия (2), а также

$$F''_{xx}(x, y) = F''_{xy}(x, y) = F''_{yy}(x, y) = 0, \quad (3)$$

но среди производных третьего порядка хотя бы одна в точке  $M_0(x_0, y_0)$  отлична от нуля, то  $M_0$  называют *тройной особой точкой*. Вообще, если в точке  $M_0$  все частные производные от  $F(x, y)$  до  $(n-1)$ -го порядка включительно обращаются в нуль, но среди производных  $n$ -го

порядка существует хотя бы одна, отличная от нуля, то  $M_0$  называют *n-кратной особой точкой*. Тогда кривая имеет  $n$  касательных в  $M_0$ ; некоторые из них могут совпадать или оказаться мнимыми (число последних — четное).

Для двойной особой точки  $M_0$  угловые коэффициенты двух касательных в этой точке являются корнями квадратного уравнения

$$F''_{xx} + 2F''_{xy}y' + F''_{yy}y'^2 = 0 \quad (x = x_0, y = y_0). \quad (4)$$

Корни уравнения могут быть действительными и различными (узловая точка или точка самопересечения), совпадающими (точка возврата или точка самоприкосновения) или мнимыми (изолированная точка).

Для тройной особой точки  $M_0$  угловые коэффициенты трех касательных в точке  $M_0$  являются корнями кубического уравнения

$$F'''_{xxx} + 3F'''_{xxy}y' + 3F'''_{xyy}y'^2 + F'''_{yyy}y'^3 = 0 \quad (x = x_0, y = y_0). \quad (5)$$

В заключение отметим, что координаты точки перегиба кривой, заданной уравнением  $F(x, y) = 0$ , удовлетворяют уравнению

$$F''_{xx}F_y'^2 - 2F''_{xy}F_x'F_y' + F''_{yy}F_x'^2 = 0.$$

Рассмотрим примеры построения алгебраических кривых, заданных неявными уравнениями. При этом будем использовать приведенную выше схему с одним небольшим изменением: в ней пункты 1<sup>0</sup> и 2<sup>0</sup> объединены.

$$1. F(x, y) = x^3 + y^3 - x^2 = 0.$$

1<sup>0</sup>. Имеем  $F'_x = 3x^2 - 2x$ ,  $F'_y = 3y^2$ . Так как  $F(x, y) = F'_x(x, y) = F'_y(x, y) = 0$  при  $x = 0$ ,  $y = 0$ , то начало координат является особой точкой.

Далее, находим  $F''_{xx} = 6x - 2$ ,  $F''_{xy} = 0$ ,  $F''_{yy} = 6y$ . Поскольку  $F''_{xx}(0, 0) \neq 0$ , начало координат есть двойная особая точка.

Так как уравнение (4) в данном случае (при  $x = 0$ ,  $y = 0$ ) имеет вид  $-2dx^2 = 0$ , то отсюда следует, что  $\frac{dx}{dy} = 0$  при  $x = 0$ ,  $y = 0$ , т. е. касательная к кривой в начале координат совпадает с осью ординат.

При  $x \rightarrow 0$ ,  $y \rightarrow 0$  имеем  $F(x, y) \sim y^3 - x^2 = 0$ , поскольку  $x^3$  — бесконечно малая высшего порядка малости относительно  $x^2$  и ее можно отбросить. Следовательно, в точке  $(0; 0)$  кривая ведет себя как  $x^{2/3}$ , т. е. начало координат есть точка возврата I рода.

2<sup>0</sup>. Угловой коэффициент касательной в неособой точке найдем как производную от неявной функции:  $y'_x = -\frac{F'_x}{F'_y} = \frac{2x - 3x^2}{3y^2}$ . Таким образом, касательная параллельна оси ординат при  $y = 0$ , т. е. в точке  $M_1(1; 0)$ . Касательная параллельна оси абсцисс при  $x = 2/3$ , т. е. в точке  $M_2(2/3; \sqrt[3]{4}/3)$  или  $M_2(0,666; 0,529)$ .

3<sup>0</sup>. Учитывая, что  $y'_x = \frac{2x - 3x^2}{3y^2}$ , а  $y^3 = x^2 - x^3$ , найдем  $y''_{xx} = -\frac{2}{9y^2(1-x)}$ .

Если  $0 < x < 1$ , то  $y''_{xx} < 0$  и кривая выпукла вверх; если же  $x > 1$ , то  $y''_{xx} > 0$  и кривая выпукла вниз. Следовательно,  $M_1(1; 0)$  — точка перегиба кривой.

4°. Чтобы найти угловой коэффициент асимптоты  $k = y/x$ , разделим обе части уравнения на  $x^3$ :

$$1 + \left(\frac{y}{x}\right)^3 - \frac{1}{x} = 0.$$

Если  $x \rightarrow \infty$ , то  $y/x \rightarrow -1$ . Следовательно,  $y + x = \frac{x^2}{y^2 - xy + x^2}$ , откуда находим

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (y + x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{y^2 - xy + x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(\frac{y}{x}\right)^2 - \frac{y}{x} + 1} = \frac{1}{3},$$

поскольку  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y}{x} = -1$ . Таким образом, кривая имеет наклонную асимптоту  $y = -x + \frac{1}{3}$ .

Кривая изображена на рис. 226.

$$2. F(x, y) = x^3 - 27(x - y)^2 = 0.$$

1°. Находим  $F'_x = 3x^2 - 54(x - y)$ ,  $F'_y = 54(x - y)$ . Отсюда получаем, что  $F(x, y)$ ,  $F'_x$ ,  $F'_y$  обращаются в нуль при  $x = 0$ ,  $y = 0$ , и, следовательно, начало координат есть особая точка.

Далее, имеем  $F''_{xx} = 6x - 54$ ,  $F''_{yy} = -54 \neq 0$ ,  $F''_{xy} = 54 \neq 0$ . Так как  $F''_{yy}$ ,  $F''_{xy}$  при  $x = 0$ ,  $y = 0$  не равны нулю, то особая точка является двойной.

Угловой коэффициент  $k$  касательной в этой точке найдем из уравнения  $F''_{xx} + 2F''_{xy}k + F''_{yy}k^2 = 0$ . Поскольку  $F''_{xx} = -54$ ,  $F''_{yy} = -54$ ,  $F''_{xy} = 54$  при  $x = 0$ ,  $y = 0$ , получим  $-54 + 108k - 54k^2 = 0$ , откуда  $k_{1,2} = 1$ . Значит,  $y = x$  — касательная к кривой в начале координат (точка возврата I рода).

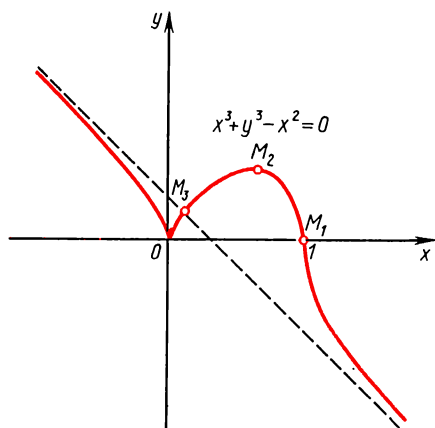


Рис. 226

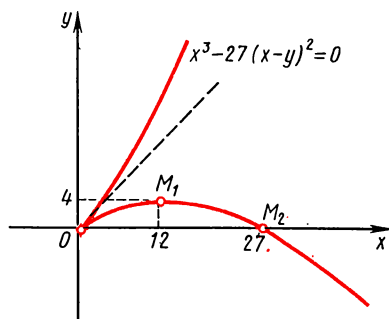


Рис. 227

2<sup>0</sup> Имеем  $y'_x = -\frac{3x^2 - 54(x-y)}{54(x-y)}$ . Учитывая, что  $(x-y)^2 = \frac{x^3}{27}$ , получим  $y'_x = 0$  при  $x = 12$ ,  $y = 4$ ; т. е. касательная параллельна оси абсцисс в точке  $M_1(12; 4)$ .

3<sup>0</sup> Так как  $y'_x = 1 \pm \frac{1}{2\sqrt{3}}\sqrt{x}$ , то  $y''_{xx} = \pm \frac{1}{4\sqrt{3}}x^{-1/2}$ . Отсюда следует, что кривая состоит из двух ветвей, для одной из которых  $y''_{xx} > 0$  и кривая выпукла вниз, а для другой  $y''_{xx} < 0$  и кривая выпукла вверх. Точек перегиба нет.

4<sup>0</sup> Если  $x \rightarrow \infty$ , то  $x - 27\left(1 - \frac{y}{x}\right)^2 \rightarrow \infty$  и  $\frac{y}{x} \rightarrow \infty$ . Асимптот нет.

5<sup>0</sup> Заметим, что из уравнения  $x^3 - 27(y-x)^2 = 0$  следует условие  $x \geq 0$ . Кроме того,  $y = 0$  при  $x = 27$ .

Кривая изображена на рис. 227.

$$3. F(x, y) = x^4 - x^2y + y^3 = 0.$$

1<sup>0</sup> Находим  $F'_x = 4x^3 - 2xy$ ,  $F'_y = -x^2 + 3y^2$ ;  $F$ ,  $F_x$ ,  $F_y$  обращаются в нуль при  $x = 0$ ,  $y = 0$ . Следовательно,  $(0; 0)$  — особая точка. Далее, имеем  $F''_{xx} = 12x^2 - 2y$ ,  $F''_{yy} = 6y$ ,  $F''_{xy} = -2x$ , откуда  $F''_{xx}$ ,  $F''_{yy}$ ,  $F''_{xy} = 0$  при  $x = 0$ ,  $y = 0$ . Наконец,  $F'''_{xxx} = 24x$ ,  $F'''_{yyy} = 6$ ,  $F'''_{xxy} = -2$ . Так как  $F'''_{yyy} \neq 0$ , то начало координат является тройной особой точкой.

Разлагая в ряд Тейлора в окрестности точки  $x = 0$  функцию  $y = y(x)$ , получим

$$y = y'(0)x + \frac{y''(0)}{2!}x^2 + \dots = kx + ax^2 + \dots$$

Тогда уравнение  $x^4 - x^2y + y^3 = 0$  после подстановки в него ряда Тейлора дает

$$x^4 - x^2(kx + ax^2 + \dots) + (kx + ax^2 + \dots)^3 = 0.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях  $x$ , получим:  $k^3 - k = 0$ , откуда  $k_1 = 0$ ,  $k_2 = 1$ ,  $k_3 = -1$ ;  $1 - a + 3ak^2 = 0$ , откуда  $a_1 = 1$ ,  $a_{2,3} = -1/2$ .

Таким образом, угловые коэффициенты касательных  $y'_1 = 0$ ,  $y'_2 = 1$ ,  $y'_3 = -1$ , а соответствующие им значения вторых производных  $y''_1 = 1$ ,  $y''_{2,3} = -1$ .

Итак, через точку  $(0; 0)$  проходят три дуги, первая из которых имеет в качестве касательной ось абсцисс и выпукла вниз, а две другие имеют в качестве касательных прямые  $y = \pm x$  и выпуклы вверх.

2<sup>0</sup> Имеем  $y'_x = \frac{4x^3 - 2xy}{3y^2 - x^2}$ , т. е.  $y'_x = 0$  при  $4x^3 - 2xy = 0$ , откуда  $y = 2x^2$ .

Подставляя это выражение в уравнение кривой, найдем  $x = \pm 1/(2\sqrt{2})$ ,  $y = 1/4$ , т. е. в точках  $M_{1,2}(\pm 0,353; 0,25)$  касательные параллельны оси абсцисс. Далее,  $y'_x = \infty$  при  $3y^2 - x^2 = 0$ , откуда, учитывая уравнение кривой, получим  $y = 2/9$ ,  $x = \pm 2\sqrt{3}/9$ , т. е. в точках  $M_{3,4}(\pm 0,384; 0,222)$  касательные параллельны оси ординат.

3°. Имеем  $x - \frac{y}{x} + \left(\frac{y}{x}\right)^3 = 0$ . При  $x \rightarrow \infty$  получим, что  $k = \frac{y}{x} \rightarrow \infty$ .

Асимптот нет.

4°. Непосредственно из уравнения кривой следует, что кривая в I координатном угле удовлетворяет условию  $0 \leq y \leq 1/4$ . В IV координатном угле ограничений по ординате нет. Разделив обе части уравнения на  $x^4$ , найдем

$$1 - \frac{y}{x^2} + \frac{y^3}{x^4} = 0, \text{ откуда при } x \rightarrow \infty \text{ получаем, что } y \sim -x^{4/3}$$

Действительно, главный член разложения  $y(x)$  в ряд в окрестности бесконечности не может быть конечным, иначе при  $x \rightarrow \infty$  левая часть данного уравнения даст 1. Положим  $y \sim -x^a$ , причем должно быть выполнено равенство

$$1 + \frac{1}{x^{2-a}} - \frac{1}{x^{4-3a}} = 0 \text{ при } x \rightarrow \infty. \text{ Так как } x > 0, \text{ то } \frac{1}{x^{2-a}} \rightarrow 0 \text{ при } x \rightarrow \infty.$$

Таким образом,  $4 - 3a = 1$ , откуда  $a = 4/3$ .

Из асимптотического поведения кривой в начале координат и на бесконечности следует, что точек перегиба у нее нет.

5°. Кривая симметрична относительно оси ординат, так как ее уравнение при замене  $x$  на  $-x$  не меняется.

Кривая изображена на рис. 228.

$$4. F(x, y) = x^4 + x^2y^2 - 18x^2y + 9y^2 = 0.$$

1°. Находим  $F'_x = 4x^3 + 2xy^2 - 36xy$ ,  $F'_y = 2x^2y - 18x^2 + 18y$ ;  $F(x, y)$ ,  $F'_x$ ,  $F'_y$  обращаются в нуль при  $x = 0$ ,  $y = 0$ . Далее, имеем  $F''_{xx} = 12x^2 + 2y^2 - 36y$ ,  $F''_{yy} = 2x^2 + 18$ ,  $F''_{xy} = 4xy - 36x$ . Так как  $F''_{yy} \neq 0$  при  $x = 0$ ,  $y = 0$ , то начало координат является двойной особой точкой. Поскольку  $(F''_{xy})^2 - F''_{xx}F''_{yy} = 0$  при  $x = 0$ ,  $y = 0$ , начало координат есть либо точка возврата, либо точка самоприкосновения.

Уравнение  $F''_{xx} = 2F''_{xy}k + F''_{yy}k^2 = 0$  в точке  $(0; 0)$  дает  $18k^2 = 0$ , откуда  $k_{1,2} = 0$ . Таким образом, начало координат является точкой самоприкосновения.

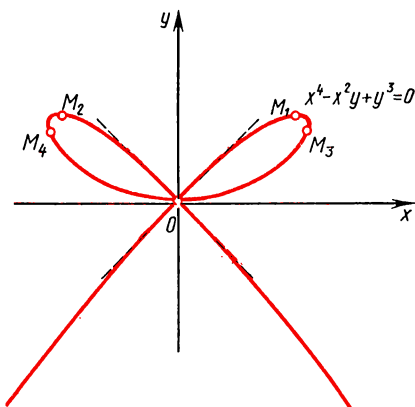


Рис. 228

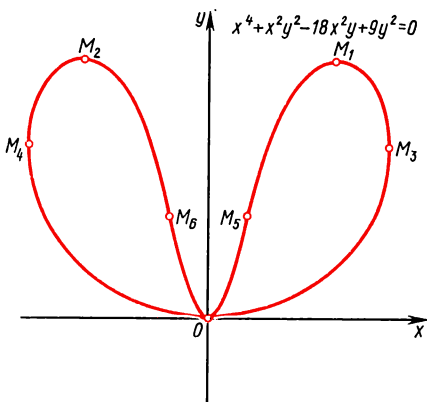


Рис. 229



2<sup>0</sup> Решая систему уравнений  $F'_x = 0$ ,  $F(x, y) = 0$ , получим  $x' = \pm 6$ ,  $y = 12$ , т. е. касательные параллельны оси абсцисс в точках  $M_1(6; 12)$  и  $M_2(-6; 12)$ . Аналогично, решая систему уравнений  $F'_y = 0$ ,  $F(x, y) = 0$ , найдем точки  $M_3(6\sqrt{2}; 8)$  и  $M_4(-6\sqrt{2}; 8)$ , в которых касательные параллельны оси ординат.

3<sup>0</sup> Отметим, что имеются две точки перегиба  $M_5$  и  $M_6$ , однако их координаты можно определить лишь численно.

4<sup>0</sup> Из уравнения кривой следует, что  $(x^2 - 3y)^2 = 12x^2y - x^2y^2 \geq 0$ , откуда  $0 \leq y \leq 12$ . Кроме того,  $y_{1,2} = \frac{9x^2 \pm x^2\sqrt{72-x^2}}{x^2+9}$ , откуда  $|x| \leq 6\sqrt{2}$ . Таким образом, кривая не может иметь асимптот.

5<sup>0</sup> Кривая симметрична относительно оси ординат, так как замена  $x$  на  $-x$  не меняет уравнения кривой.

Кривая изображена на рис. 229.

$$5. F(x, y) = x^4 - y^4 + xy = 0.$$

1<sup>0</sup> Находим  $F'_x = 4x^3 + y$ ,  $F'_y = -4y^3 + x$ . Начало координат является особой точкой, так как  $F'_x$ ,  $F'_y$  и  $F(x, y)$  обращаются в нуль при  $x = 0$ ,  $y = 0$ . Далее, имеем  $F''_{xx} = 12x^2$ ,  $F''_{yy} = -12y^2$ ,  $F''_{xy} = 1 \neq 0$ , т. е. начало координат является двойной особой точкой.

Так как  $F''_{xy}{}^2 - F''_{xx}F''_{yy}$  при  $x = 0$ ,  $y = 0$ , то начало координат есть точка самопересечения.

Уравнение  $F''_{xx}dx^2 + 2F''_{xy}dxdy + F''_{yy}dy^2 = 0$  при  $x = 0$ ,  $y = 0$  дает  $2dxdy = 0$ , откуда следует, что уравнения касательных в начале координат имеют вид  $x = 0$  и  $y = 0$ . Таким образом, в окрестности начала координат можно выделить две элементарные линии, касательными к которым служат оси координат.

2<sup>0</sup> Системы  $F'_x = 0$ ,  $F(x, y) = 0$  и  $F'_y = 0$ ,  $F(x, y) = 0$  не имеют решений, отличных от нулевого. Поэтому кривая не имеет точек, в которых касательные были бы параллельны осям координат.

3<sup>0</sup> Координаты точек перегиба должны удовлетворять уравнению  $F''_{xx}F'^2_{yy} - 2F''_{xy}F'_xF'_y + F''_{yy}F'^2_x = 0$ . Решая это уравнение, найдем  $x_{1,2} = \pm 0,8421$ ,  $x_{3,4} = \pm 0,5142$ . Таким образом, имеем четыре точки перегиба  $M_1(0,5142; 0,8421)$ ,  $M_2(0,8421; -0,5142)$ ,  $M_3(-0,5142; -0,8421)$  и  $M_4(-0,8421; 0,5142)$ .

4<sup>0</sup> Разделив обе части уравнения  $x^4 - y^4 + xy = 0$  на  $x^4$  и переходя к пределу при  $x \rightarrow \infty$ , находим  $k_{1,2} = \pm 1$ . Затем из данного уравнения выразим  $y - x = \frac{xy}{(y^2 + x^2)(y + x)}$  и перейдем к пределу при  $x \rightarrow \infty$ ; получим  $y - x \rightarrow 0$ ,

т. е.  $b_1 = 0$ . Аналогично при  $k_2 = -1$  получим  $b_2 = 0$ . Итак, кривая имеет две наклонные асимптоты  $y = \pm x$ .

5<sup>0</sup> Кривая симметрична относительно начала координат, так как ее уравнение не меняется при замене  $x$  на  $-x$  и  $y$  на  $-y$ .

Кривая изображена на рис. 230.

$$6. F(x, y) = x^5 - x^4 + 4x^2y - 4y^2 = 0.$$

1<sup>0</sup> Здесь  $F'_x = 5x^4 - 4x^3 + 8xy$ ,  $F'_y = 4x^2 - 8y$ . Так как  $F(x, y)$ ,  $F'_x$ ,  $F'_y$  обращаются в нуль при  $x = 0$ ,  $y = 0$ , то начало координат является особой

точкой. Далее, поскольку  $F''_{xx} = 20x^3 - 12x^2 + 8y$ ,  $F''_{yy} = -8$ ,  $F''_{xy} = 8x$  и  $F''_{yy} \neq 0$ , начало координат есть двойная особая точка.

Угловой коэффициент касательной в этой точке найдем из уравнения  $F''_{xx} + 2F''_{xy}y' + F''_{yy}y'^2 = 0$  при  $x = 0$ ,  $y = 0$ . Имеем  $-8y'^2 = 0$ , откуда  $y'_{1,2} = 0$ . Так как  $F''_{xy} - F''_{xx}F''_{yy} = 0$  при  $x = 0$ ,  $y = 0$ , то начало координат является либо точкой возврата, либо точкой самоприкосновения.

Разлагая  $y(x)$  в ряд Тейлора в окрестности нуля, учитывая, что  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 0$ , и ограничиваясь первым отличным от нуля членом, получим  $y(x) \approx ax^2 + \dots$ . Затем, подставляя этот ряд в данное уравнение и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях  $x$  ( $x^5$  мало по сравнению с  $x^4$ ), найдем  $a_{1,2} = 1/2$ . Отсюда  $y''(0) > 0$  и кривая выпукла вниз в точке  $(0; 0)$ . Это означает, что начало координат является точкой возврата II рода.

2°. Решая систему  $F'_x = 0$ ,  $F(x, y) = 0$ , найдем  $x = 16/25$ ,  $y = 128/3125$ . Таким образом, в точке  $M_1(16/25; 128/3125)$  касательная параллельна оси абсцисс. Далее, поскольку система  $F'_y = 0$ ,  $F(x, y) = 0$  не имеет отличных от нуля решений, касательные, параллельные оси ординат, отсутствуют.

3° Заметим, что кривая допускает явное представление  $y = \frac{1}{2}(x^2 \pm x^{5/2})$ , откуда  $y'' = \frac{1}{2}(2 \pm \frac{15}{4}\sqrt{x})$ . Приравнявая  $y''$  нулю, найдем  $x = 64/225$ ,  $y = 28\,672/759\,375$ . Таким образом, имеется точка перегиба  $M_0(0,2844; 0,0377)$ .

4°. Разделив обе части данного уравнения на  $x^3$ , имеем  $x^2 - x + 4\frac{y}{x} - 4\frac{1}{x} \cdot \left(\frac{y}{x}\right)^2 = 0$ . При  $x \rightarrow \infty$  получаем, что  $y/x$  не может быть ограничен. То же имеет место и при  $y \rightarrow \infty$ . Таким образом, асимптот нет.

5°. Кривая пересекает ось абсцисс в точке  $M_2(1; 0)$ .

Рассмотрим поведение кривой при  $x \rightarrow \infty$ . Пренебрегая  $x^4$  по сравнению с  $x^5$ , получим  $y \sim \pm(1/2)x^a$ , где  $a = 2,5$ . Действительно при  $a > 2,5$  уравнение удовлетворяется, если члены  $4x^2y$  и  $4y^2$  имеют одинаковый порядок, что невозможно. При  $x \leq 2,5$  членом  $4x^2y$  можно пренебречь по сравнению с  $x^5$ , откуда получаем, что  $y \sim \pm(1/2)x^{2,5}$  при  $x \rightarrow \infty$ .

Кривая изображена на рис. 231.

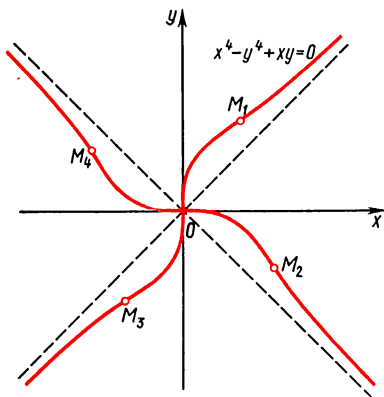


Рис. 230

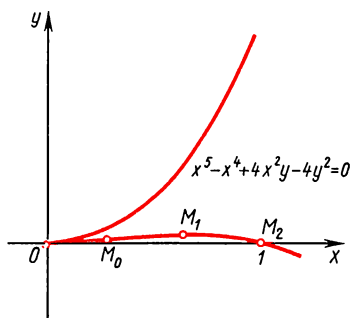


Рис. 231

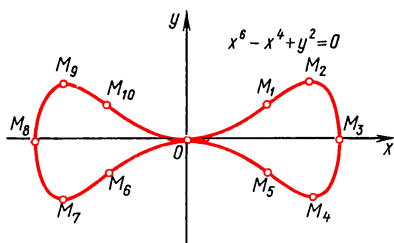


Рис. 232

$$7. F(x, y) = x^6 - x^4 + y^2 = 0.$$

1<sup>0</sup> Находим  $F'_x = 6x^5 - 4x^3$ ,  $F'_y = 2y$ . Так как  $F(x, y) = F'_x = F'_y = 0$  при  $x = 0$ ,  $y = 0$ , то в начале координат кривая имеет особую точку. Далее, поскольку  $F''_{xx} = 30x^1 - 12x^2$ ,  $F''_{yy} = 2$ ,  $F''_{xy} = 0$  и  $F''_{yy} \neq 0$ , начало координат есть двойная особая точка.

Угловым коэффициентом касательной в этой точке найдем из уравнения

$F''_{xx} + 2F''_{xy}y' + F''_{yy}y'^2 = 0$  при  $x = 0$ ,  $y = 0$ , откуда  $2y'^2 = 0$ , т. е.  $y'_{1,2} = 0$ . Так как  $F''_{xy} - F''_{xx}F''_{yy} = 0$ , то начало координат является либо точкой возврата, либо точкой самоприкосновения.

При  $x \rightarrow 0$  член  $x^6$  мал по сравнению с  $x^4$ , поэтому им можно пренебречь. Тогда в окрестности точки  $x = 0$  получим  $y \sim \pm x^2$ . Значит, начало координат есть точка самоприкосновения.

2<sup>0</sup> Решая систему  $F'_x = 0$ ,  $F(x, y) = 0$ , найдем  $x = \pm 0,8165$ ,  $y = \pm 0,3849$ . Таким образом, в точках  $M_2(0,8165; 0,3849)$ ,  $M_4(0,8165; -0,3849)$ ,  $M_7(-0,8165; -0,3849)$  и  $M_9(-0,8165; 0,3849)$  касательная параллельна оси абсцисс.

Решая систему  $F'_y = 0$ ,  $F(x, y) = 0$ , получим  $x = \pm 1$ ,  $y = 0$ . Таким образом, в точках  $M_3(1; 0)$  и  $M_8(-1; 0)$  касательная параллельна оси ординат.

3<sup>0</sup> Имеем  $y' = \frac{2x^3 - 3x^5}{y}$ ,  $y'' = \frac{x^2(6x^4 - 9x^2 + 2)}{(1 - x^2)y}$ . Приравняв  $y''$  нулю, найдем  $x_{1,2} = \pm 0,52085$ . Так как кривая симметрична относительно осей абсцисс и ординат, то имеются четыре точки перегиба:  $M_1(0,52085; 0,2316)$ ,  $M_5(0,52085; -0,2316)$ ,  $M_6(-0,52085; -0,2316)$  и  $M_{10}(-0,52085; 0,2316)$ .

4<sup>0</sup> Имеем  $y^2 = x^4 - x^6 = x^4(1 - x^2)$ . Отсюда  $1 - x^2 \geq 0$  и  $|x| \leq 1$ . Асимптот нет.

Кривая изображена на рис. 232.

#### § 4. Кривые, заданные уравнениями в полярных координатах

Рассмотрим на плоскости луч  $OE$  с начальной точкой  $O$  и некоторой точкой  $E$  такой, что  $|OE| = 1$ . Луч будем называть *полярной осью*, точку  $O$  — *полюсом*, точку  $E$  — *единичной точкой*. Пусть  $M$  — произвольная точка плоскости (рис. 233).

Длину отрезка  $OM$ , измеренного с помощью отрезка  $OE$ , называют длиной *полярного радиуса* точки  $M$  и обозначают  $\rho$ . Положительный угол от луча  $OE$  до луча  $OM$  называют *полярным углом* точки  $M$  и обозначают  $\varphi$ .

Если точка  $M$  совпадает с полюсом, то  $\rho = 0$ , а угол  $\varphi$  не имеет определенного значения. Однако в некоторых задачах углу  $\varphi$  для полюса придают определенное значение. Рассмотрим, например, окружность с центром в точке  $E$ , проходящую через полюс  $O$

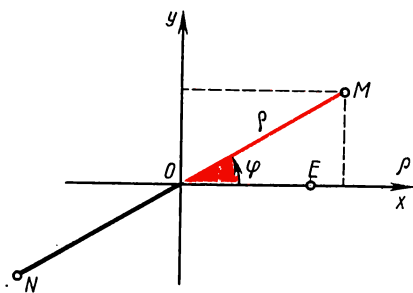


Рис. 233

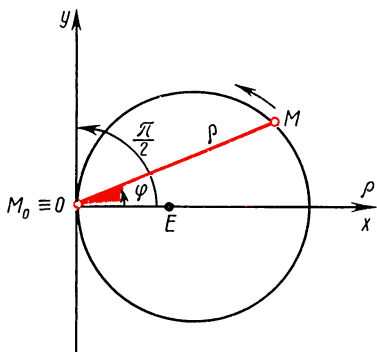


Рис. 234

(рис. 234). Тогда полярному углу точки  $M_0$  этой окружности, совпадающей с полюсом  $O$ , целесообразно приписывать значение  $\varphi = \pi/2$ , так как при движении точки  $M$  по окружности к полюсу секущая  $OM$  стремится к прямой, перпендикулярной полярной оси. Пара чисел  $\varphi$  и  $\rho$  называется *полярными координатами* точки  $M$ .

Если известны полярные координаты точки  $M$  (рис. 233), то ее декартовы координаты вычисляются по формулам

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi.$$

Обратно, если известны декартовы координаты  $x$  и  $y$  точки  $M$ , то ее полярные координаты определяются по формулам

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}; \quad \cos \varphi = \frac{x}{\rho} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}; \quad \sin \varphi = \frac{y}{\rho} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

При решении некоторых задач на одной прямой, проходящей через полюс, приходится рассматривать две точки  $M$  и  $N$ , расположенные по разные стороны относительно точки  $O$  (см. рис. 233). В таком случае имеет смысл принять за полярный угол этих точек общий угол, например от луча  $OE$  до луча  $OM$ . Тогда  $\rho$  для точки  $M$  будем считать числом положительным, а для точки  $N$  — отрицательным.

Полярные координаты  $\varphi$  и  $\rho < 0$  называют *обобщенными полярными координатами* точки. Полярный угол  $\varphi$  отсчитывают от полярной оси, считая его положительным в том случае, когда отсчет ведется против часовой стрелки.

Полярный радиус-вектор можно брать как положительным, так и отрицательным; в первом случае его откладывают в направлении, определяемом углом  $\varphi$ , а во втором — в противоположном направлении.

Построение кривых, заданных полярными уравнениями, имеет некоторые специфические особенности, которые мы проиллюстрируем на примерах.

Сначала рассмотрим так называемые *алгебраические спирали*,

т. е. кривые, полярные уравнения которых являются алгебраическими относительно  $\rho$  и  $\varphi$  и имеют вид  $f(\rho, \varphi) = 0$ . Если перейти к прямоугольной системе координат, то очевидно, что эти уравнения уже не будут алгебраическими. Их называют *трансцендентными*.

Трансцендентные кривые можно рассматривать как алгебраические линии бесконечно высокого порядка. Действительно, разлагая в ряд левую часть уравнения  $f(\sqrt{x^2 + y^2}, \arctg \frac{y}{x}) = 0$ , мы получим уравнение, содержащее алгебраические функции, однако число членов в нем будет неограниченным, а степень бесконечно большой. Поэтому число характерных точек алгебраических кривых (точек пересечения с заданной прямой, точек перегиба, особых точек и т. д.) в случае трансцендентных кривых может быть бесконечным. Трансцендентные кривые могут иметь также характерные точки, которые не существуют у алгебраических кривых. К ним относятся: *точка прекращения*, обладающая той особенностью, что окружность достаточно малого радиуса, проведенная из такой точки, как из центра, пересекает кривую только в одной точке; *угловая точка*, в которой прекращаются две ветви кривой, причем каждая из них имеет в этой точке свою касательную; *асимптотическая точка*, к которой неограниченно приближается ветвь кривой, делая вокруг этой точки бесконечное количество оборотов.

---

### Примеры спиралей. 1. Спираль Архимеда $\rho = \varphi$ .

---

Для построения этой кривой составим таблицу опорных точек:

$\varphi$	0	$\pi/6$	$\pi/3$	$\pi/2$	$\pi$	$3\pi/2$	$2\pi$
$\rho$	0	$\pi/6$	$\pi/3$	$\pi/2$	$\pi$	$3\pi/2$	$2\pi$

Откладывая  $\rho$  на соответствующих лучах, найдем точки кривой. Соединяя эти точки плавной линией, получим спираль Архимеда (рис. 235).

Из полярного уравнения спирали следует, что замена  $\varphi$  на  $-\varphi$  приводит к замене  $\rho$  на  $-\rho$ . Таким образом, в обобщенной полярной системе координат кривая будет состоять из двух ветвей, одна из которых раскручивается против хода часовой стрелки и соответствует положительным значениям  $\varphi$ , а другая — по ходу часовой стрелки и соответствует отрицательным значениям  $\varphi$  (рис. 235).

Кривая симметрична относительно перпендикуляра к полярной оси, на котором лежат точки пересечения двух ее ветвей. Переходя в уравнении кривой к декартовой системе координат, получим

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \arctg \frac{y}{x}.$$

Так как данное уравнение не является алгебраическим, то спираль Архимеда относится к трансцендентным кривым.

Спираль Архимеда может быть определена как траектория точки, участвующей одновременно в двух равномерных движениях, одно из которых совершается вдоль прямой, а другое — по окружности.

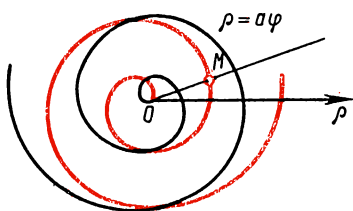


Рис. 235

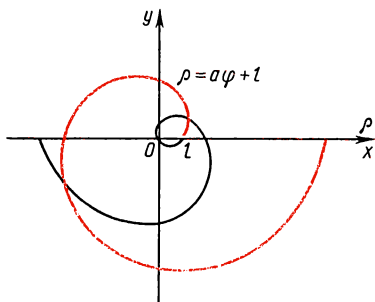


Рис. 236

Предположим, что некоторая точка равномерно движется по прямой  $ON$ , а прямая  $ON$  равномерно вращается вокруг точки  $O$  (рис. 235). Принимая точку  $O$  за полюс системы, начальное положение  $OP$  прямой  $ON$  — за полярную ось и считая, что в начальный момент движения точка  $M$  совпадала с полюсом, найдем, что расстояние  $OM$ , пройденное точкой  $M$  вдоль прямой  $ON$ , и полярный угол  $\varphi$  в силу равномерности движения возрастают пропорционально времени и, следовательно, пропорциональны друг другу. Поэтому полярное уравнение спирали Архимеда запишется в виде  $\rho = a\varphi$ , где  $a$  — коэффициент пропорциональности. В рассмотренном выше примере  $a = 1$ .

Свойства этой спирали впервые были изучены Архимедом. Кривая имеет бесконечное число витков. Расстояние  $l$  между двумя последовательными витками (считая по лучу) выражается формулой

$$l = a(\varphi + 2\pi) - a\varphi = 2a\pi$$

и является, как видно, постоянной величиной. Кривизна  $K$  в полярной системе координат определяется формулой

$$K = \frac{\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho''}{(\rho^2 + \rho'^2)^{3/2}}.$$

Для спирали Архимеда  $K > 0$  при всех значениях аргумента  $\varphi$ . Поэтому точек перегиба кривая не имеет.

## 2. $\rho = a\varphi + l$ .

Эта кривая является обобщением спирали Архимеда и получается в результате увеличения радиусов-векторов последней на величину  $l$  ( $l > 0$ ). При изменении  $\varphi$  от 0 до  $+\infty$  значение  $\rho$  изменяется от  $l$  до  $+\infty$ , а кривая раскручивается против хода часовой стрелки (рис. 236). При изменении  $\varphi$  от 0 до  $-\infty$  значение  $\rho$  изменяется от  $l$  до  $-\infty$ , а при  $\varphi = -l/a$  обращается в нуль. Поэтому вторая ветвь кривой пересекает сама себя и далее раскручивается по ходу часовой стрелки (рис. 236).

## 3. Гиперболическая спираль $\rho = a/\varphi$ .

Если  $\varphi \rightarrow \infty$ , то  $\rho \rightarrow 0$  и, значит, полюс является асимптотической

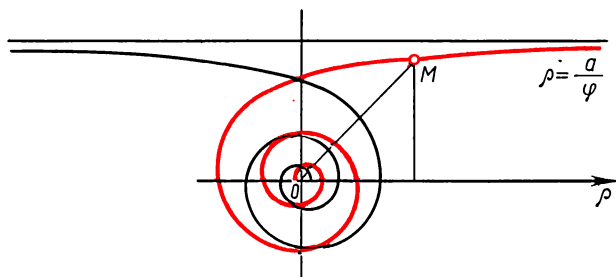


Рис. 237

точкой спирали. Далее,  $MP = \rho \sin \varphi = \frac{a \sin \varphi}{\varphi} \rightarrow a$  при  $\varphi \rightarrow 0$ . Поэтому прямая  $y = a$  в прямоугольной системе координат, начало координат которой совпадает с полюсом, а полярная ось — с положительной частью оси абсцисс, есть асимптота гиперболической спирали (рис. 237).

Так как  $\rho' = -\frac{a}{\varphi^2}$ ,  $\rho'' = \frac{2a}{\varphi^3}$ , то  $K > 0$  для всех  $0 < |\varphi| < +\infty$ . Точек перегиба нет.

Из уравнения кривой следует, что она состоит из двух ветвей, расположенных симметрично относительно оси ординат (рис. 237).

$$4. \rho = \frac{a}{\varphi} + l.$$

Прямая  $y = a$  является асимптотой данной кривой, поскольку  $\lim_{\varphi \rightarrow 0} \rho \sin \varphi = \lim_{\varphi \rightarrow 0} \left( \frac{a}{\varphi} + l \right) \sin \varphi = a$ .

Так как  $\rho' = -\frac{a}{\varphi^2}$ ,  $\rho'' = \frac{2a}{\varphi^3}$ , то  $K = \frac{\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho''}{(\rho^2 + \rho'^2)^{3/2}} = 0$  при  $\varphi(a + l\varphi)^2 - 2al = 0$ . Это уравнение имеет один корень  $\varphi = \varphi_1$ , где  $0 < \varphi_1 < 1$ , так как если  $\varphi \geq 1$ , то  $\varphi(a + l\varphi)^2 - 2al > 0$ , а если  $\varphi \leq 0$ , то  $\varphi(a + l\varphi)^2 - 2al < 0$ . Следовательно, кривая имеет одну точку перегиба при  $\varphi = \varphi_1$ .

При возрастании  $\varphi$  от 0 до  $+\infty$  значение  $\rho \rightarrow l$ , т. е. кривая, закру-

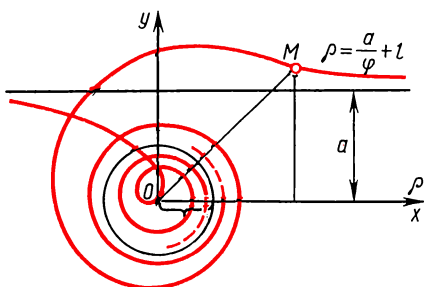


Рис. 238

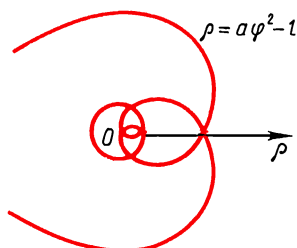


Рис. 239

чиваясь против хода часовой стрелки, асимптотически приближается к окружности  $\rho = l$ . При изменении  $\varphi$  от 0 до  $-\infty$  значение  $\rho$  изменяется от  $-\infty$  до  $l$ , при  $\varphi = -l/a$  оно обращается в нуль, после чего  $\rho$  откладывается в противоположном направлении. Поэтому вторая ветвь кривой пересекает сама себя и далее асимптотически приближается к той же окружности, что и первая ветвь, но уже с внутренней стороны (рис. 238).

### 5. Спираль Галилея $\rho = a\varphi^2 - l$ ( $l \geq 0$ ).

Кривая симметрична относительно полярной оси. Если  $\varphi = 0$ , то  $\rho = -l$ , а если  $\varphi = \pm\sqrt{l/a}$ , то  $\rho = 0$ . Таким образом, кривая имеет двойную точку в полюсе (рис. 239). Она имеет также бесконечное множество двойных точек на полярной оси, для которых  $\rho = a\varphi_k^2 - l$ , где  $\varphi_k = \pm\pi k$ ,  $k = 1, 2, 3$ . При  $l = 0$  получаем спираль  $\rho = a\varphi^2$  (рис. 240), полюс которой является особой точкой (если  $\varphi = 0$ , то  $\rho = 0$  и  $\rho' = 0$ ), причем

$$\lim_{\varphi \rightarrow 0} y'_x = \lim_{\varphi \rightarrow 0} \frac{\rho' \sin \varphi + \rho \cos \varphi}{\rho' \cos \varphi - \rho \sin \varphi} = \lim_{\varphi \rightarrow 0} \frac{2a\varphi \sin \varphi + a\varphi^2 \cos \varphi}{2a\varphi \cos \varphi - a\varphi^2 \sin \varphi} = 0.$$

### 6. $\rho = \frac{a}{\varphi^2}$ .

Если  $\varphi \rightarrow 0$ , то  $\rho \rightarrow \infty$ , а если  $\varphi \rightarrow \infty$ , то  $\rho \rightarrow 0$ . Кривая состоит из двух бесконечных ветвей, напоминающих ветви параболы, а в начале координат имеет двойную асимптотическую точку (рис. 241).

### 7. Спираль Ферма $\rho^2 = a^2\varphi$ .

Так как каждому положительному значению  $\varphi$  соответствуют два значения  $\rho$ , противоположные по знаку, то кривая обладает центральной симметрией.

Если  $\varphi \rightarrow \infty$ , то и  $\rho \rightarrow \infty$ . Кривая состоит из двух ветвей, одна из которых соответствует положительным значениям  $\rho = a\sqrt{\varphi}$ , а другая — отрицательным  $\rho = -a\sqrt{\varphi}$  (рис. 242). Обе ветви начинаются в полюсе, где кривая имеет точку перегиба. Каждая ветвь, совершая бесконечное количество оборотов вокруг полюса, удаляется в бесконечность. При этом расстояние

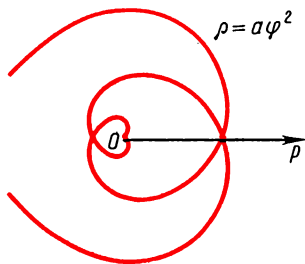


Рис. 240

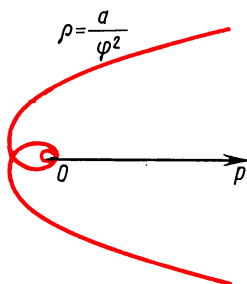


Рис. 241



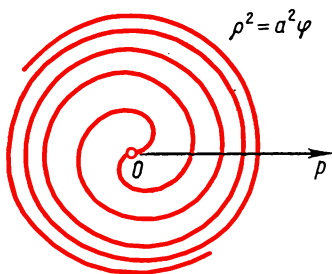


Рис. 242

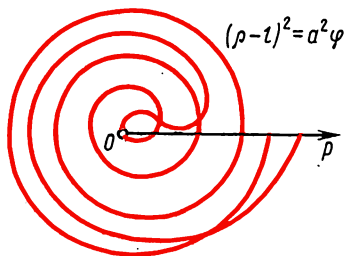


Рис. 243

между двумя соседними витками убывает, точнее  $a\sqrt{\varphi+2\pi} - a\sqrt{\varphi} \rightarrow 0$  при  $\varphi \rightarrow \infty$  (рис. 242).

#### 8. Параболическая спираль $(\rho - l)^2 = a^2 \varphi$ ( $l > 0$ ).

Кривая состоит из двух ветвей  $\rho = a\sqrt{\varphi} + l$  и  $\rho = -a\sqrt{\varphi} + l$ . Вторая из них образует с первой бесконечное множество двойных точек; она имеет также одну точку перегиба (рис. 243). Действительно, касательная к кривой в точке  $\varphi = 0$  совпадает с полярной осью, а кривизна  $K = \frac{\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho''}{(\rho^2 + \rho'^2)^{3/2}}$  обращается в нуль при  $\varphi = \varphi_1$ , где  $\varphi_1 > 0$  — корень уравнения  $4\varphi\sqrt{\varphi}(l - a\sqrt{\varphi})^2 + 3a^2\sqrt{\varphi} - al = 0$ .

#### 9. Жезл $\rho^2 = \frac{a^2}{\varphi}$ ( $a > 0$ ).

Кривая обладает центральной симметрией и состоит из двух ветвей  $\rho = a/\sqrt{\varphi}$  и  $\rho = -a/\sqrt{\varphi}$ , каждая из которых асимптотически приближается к полюсу (рис. 244).

Если  $\varphi \rightarrow 0$ , то  $\rho \rightarrow \infty$ ; поскольку  $\lim_{\varphi \rightarrow 0} \rho \sin \varphi = \lim_{\varphi \rightarrow 0} \frac{a \sin \varphi}{\sqrt{\varphi}} = 0$ , полярная ось служит асимптотой данной кривой. Так как  $K = 0$  при  $\varphi = 1/2$ , причем  $K > 0$  при  $\varphi > 1/2$  и  $K < 0$  при  $0 < \varphi < 1/2$ , то  $(1/2; a\sqrt{2})$  является точкой перегиба.

#### 10. Логарифмическая спираль $\rho = a^{\varphi}$ .

При  $\varphi = 0$  имеем  $\rho = 1$ .

Если  $a > 1$ , то при  $\varphi \rightarrow +\infty$  значение  $\rho \rightarrow +\infty$  и спираль развертывается против хода часовой стрелки; при  $\varphi \rightarrow -\infty$  значение  $\rho \rightarrow 0$  и спираль закручивается по ходу часовой стрелки, асимптотически стремясь к полюсу — своей асимптотической точке (рис. 245).

Если же  $0 < a < 1$ , то при  $\varphi \rightarrow +\infty$  значение  $\rho \rightarrow 0$  и спираль закручивается вокруг полюса против хода часовой стрелки, а при  $\varphi \rightarrow -\infty$  значение  $\rho \rightarrow +\infty$  и спираль развертывается по ходу часовой стрелки.

Рассмотрим теперь логарифмическую спираль вида  $\rho = ca^{\varphi}$ . Повернув

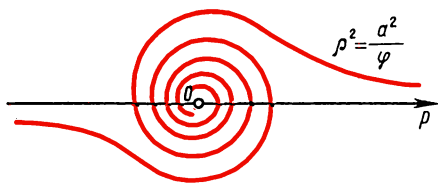


Рис. 244

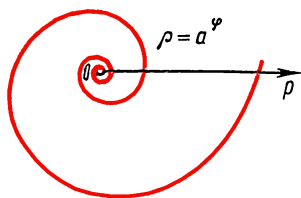


Рис. 245

полярную ось на некоторый угол  $\varphi_1$ , всегда можно добиться того, чтобы коэффициент  $c$  был равен единице. Действительно, после поворота на угол  $\varphi_1$  получим  $\rho = ca^{\varphi+\varphi_1} = ca^{\varphi_1} \cdot a^{\varphi}$ . Из условия  $ca^{\varphi_1} = 1$  находим искомый угол поворота  $\varphi_1 = \log_a c$ .

Каждая логарифмическая спираль пересекает все свои радиусы-векторы под одним и тем же углом  $\mu$ . В самом деле, так как

$$y'_x = \operatorname{tg} \alpha = \frac{\rho' \sin \varphi + \rho \cos \varphi}{\rho' \cos \varphi - \rho \sin \varphi}, \quad \mu = \alpha - \varphi,$$

$$\text{то } \operatorname{tg} \mu = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \varphi}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \varphi}, \quad \text{откуда } \operatorname{tg} \mu = \frac{\rho}{\rho'}.$$

В данном случае

$$\operatorname{tg} \mu = \frac{a^{\varphi}}{a^{\varphi} \ln a} = \frac{1}{\ln a}.$$

Радиус кривизны спирали в произвольной точке пропорционален радиусу-вектору этой точки. Действительно,

$$R = \frac{(\rho^2 + \rho'^2)^{3/2}}{\rho^2 + 2\rho\rho'' - \rho\rho''} = \frac{(a^{2\varphi} + a^{2\varphi} \ln^2 a)^{3/2}}{a^{2\varphi} + 2a^{2\varphi} \ln^2 a - a^{2\varphi} \ln^2 a} = \rho \sqrt{1 + \ln^2 a}.$$

Логарифмическую спираль удобно задавать уравнением  $\rho = ce^{k_1 \varphi}$ . При этом  $\operatorname{tg} \mu = 1/k_1$ ,  $k_1 = \ln a$ . Тогда  $R = \rho \sqrt{1 + k_1^2}$ . В случае  $k_1 = 0$  получаем окружность  $\rho = c$ .

Применения логарифмической спирали в технике основаны на свойстве этой кривой пересекать все свои радиусы-векторы под одним и тем же углом. Так, например, вращающиеся ножи в различных режущих машинах имеют профиль, очерченный по дуге спирали, благодаря чему угол резания, т. е. угол  $\theta$  между лезвием ножа и направлением скорости его вращения, остается равным  $\frac{\pi}{2} - \mu$  и, следовательно, постоянным. Нужный угол резания обеспечивается выбором параметра соответствующей спирали.

**Примеры кривых, полярные уравнения которых содержат тригонометрические функции.** 1. *Трехлепестковая и четырехлепестковая роза*  $\rho = a \sin 3\varphi$  и  $\rho = a \sin 2\varphi$  ( $a > 0$ ).

Построение этих кривых можно выполнить по точкам, где  $\varphi$  принимает значения от 0 до  $2\pi$  (рис. 246, а и б).

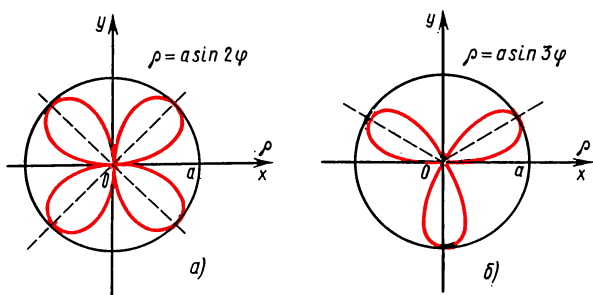


Рис. 246

Вообще говоря, *розами* называют семейство кривых, полярное уравнение которых записывается в виде  $\rho = a \sin r\varphi$  или в виде  $\rho = a \cos r\varphi$ , где  $a$  и  $r$  — положительные постоянные.

Так как  $|\sin r\varphi| \leq 1$ ,  $|\cos r\varphi| \leq 1$ , то вся кривая расположена внутри круга радиуса  $a$ . В силу того, что  $\sin r\varphi$  и  $\cos r\varphi$  — периодические функции, роза состоит из конгруэнтных лепестков, симметричных относительно наибольших радиусов, каждый из которых равен  $a$ .

Если  $|r|$  — целое число, то роза состоит из  $2r$  лепестков при  $r$  четном (рис. 246, а) и из  $r$  лепестков при  $r$  нечетном (рис. 246, б).

Если  $r$  — рациональное число, равное  $m/n$ , то роза состоит из  $m$  лепестков в случае, когда оба числа  $m$  и  $n$  нечетные (рис. 247, а и г), и из  $2m$  лепестков, когда одно из этих чисел является четным (рис. 247, б и в); при этом лепестки частично перекрываются.

Если  $r$  — иррациональное число, то роза состоит из бесконечного множества частично перекрывающихся лепестков.

## 2. Улитка Паскаля $\rho = 2r \cos \varphi + l$ .

Если  $l = 0$ , то  $\rho = 2r \cos \varphi$ , откуда  $\sqrt{x^2 + y^2} = 2r \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$  или  $x^2 + y^2 - 2rx = 0$ . Последнее уравнение является уравнением окружности с центром в точке  $(r; 0)$  и радиусом  $r$ . Действительно,  $x^2 + y^2 - 2rx = (x - r)^2 + y^2 - r^2 = 0$  или  $(x - r)^2 + y^2 = r^2$ . Отсюда следует, что для построения точек, принадлежащих улитке Паскаля, нужно в каждом положении по-

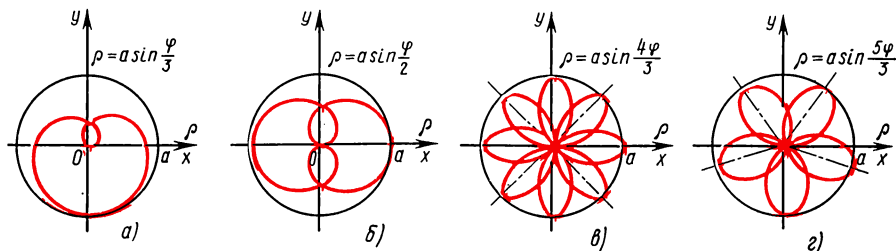


Рис. 247

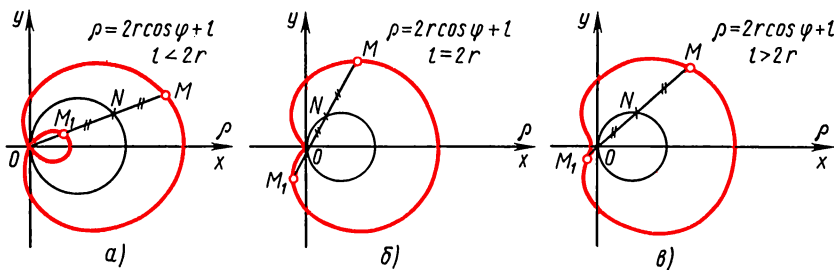


Рис. 248

лярного радиуса-вектора достроить к нему отрезок  $l$ . На рис. 248, а—в эти построения выполнены для трех случаев:  $l < 2r$ ,  $l = 2r$  и  $l > 2r$ .

В случае  $l = 2r$  улитка Паскаля имеет уравнение  $\rho = 2r(1 + \cos \varphi)$ . При этом начало координат является точкой возврата I рода (рис. 248, а). В случае  $l < 2r$  начало координат есть точка самопересечения (рис. 248, б).

### 3. Кардиоида $\rho = 2r(1 - \cos \varphi)$ .

По виду этого уравнения можно заключить, что кардиоида является одной из улиток Паскаля. Переходя к прямоугольной системе координат, получим  $(x^2 + y^2 + 2rx)^2 = 4r^2(x^2 + y^2)$ . Отсюда следует, что кардиоида представляет собой алгебраическую кривую 4-го порядка (рис. 249).

### 4. Каппа $\rho = a \operatorname{ctg} \varphi$ .

Переходя в уравнении кривой к прямоугольной системе координат, получим  $(x^2 + y^2)y^2 = a^2x^2$ , откуда следует, что каппа представляет собой алгебраическую кривую 4-го порядка, симметричную относительно осей координат.

Так как  $F(x, y) = (x^2 + y^2)y^2 - a^2x^2$  и  $F'_x = 2xy - 2a^2x$ ,  $F'_y = 2x^2y + 4y^3$ , то при  $x = 0$ ,  $y = 0$  имеем  $F'_x = 0$ ,  $F'_y = 0$ . Следовательно, начало координат есть особая точка. Поскольку вторая производная по аргументу  $x$ , равная  $F''_{xx} = 2y^2 - 2a^2$ , при  $x = 0$ ,  $y = 0$  отлична от нуля, начало координат является двойной особой точкой. Заметим, что  $F''_{xy} - F''_{xx}F''_{yy} = 0$  при  $x = 0$ ,  $y = 0$ . Отсюда следует, что начало координат есть точка самоприкосновения.

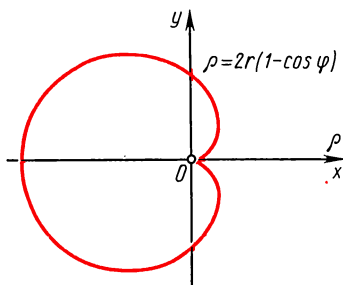


Рис. 249

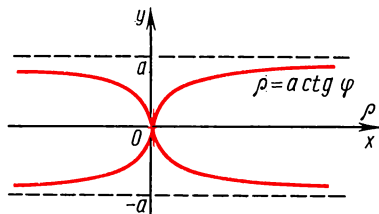


Рис. 250

Так как  $\lim_{\varphi \rightarrow 0} \rho \sin \varphi = a$ , то прямые  $y = \pm a$  являются асимптотами данной кривой.

Ось ординат служит касательной к кривой в точке самоприкосновения (начале координат), поскольку  $y'_x \rightarrow \infty$  при  $\varphi \rightarrow \pi/2$ .

Общий вид кривой изображен на рис. 250.

Каппа является представителем семейства кривых, выражаемых уравнением  $\rho = a \operatorname{actg} r\varphi$ . Вообще говоря, кривые, уравнения которых имеют вид  $\rho = a \operatorname{actg} 2\varphi$  или  $\rho = a \operatorname{atg} 2\varphi$ , называются *узлами*. Указанные кривые имеют в начале координат особую точку и асимптоты, параллельные координатным осям. При  $r = 2$  получается так называемая «ветряная мельница» (рис. 251).

#### 5. Лемниската Бернулли $\rho^2 = 2a^2 \cos 2\varphi$ .

Из уравнения кривой следует, что кривая состоит из двух симметричных лепестков и расположена между прямыми  $y = \pm x$ . Начало координат является двойной особой точкой. Отметим, что  $\rho = a\sqrt{2}$  при  $\varphi = 0$ .

Кривая изображена на рис. 252.

Лемниската Бернулли является представителем семейства кривых, выражаемых в полярной системе координат уравнением  $\rho^m = a^m \sin m\varphi$  или  $\rho^m = a^m \cos m\varphi$  и называемых *синусоидальными спиралями*.

При положительном значении индекса  $m$  кривая проходит через полюс и целиком содержится в круге радиуса  $a$ . При отрицательном значении индекса  $m$  радиус-вектор может принимать сколь угодно большие значения, поэтому кривая имеет бесконечные ветви и не проходит через полюс.

На рис. 253 изображены синусоидальные спирали для случаев  $m = 4$  и  $m = -4$ .

#### 6. Трисектриса Маклорена $\rho = \frac{a}{\cos(\varphi/3)}$ .

Кривая пересекает ось абсцисс в двух точках:  $(a; 0)$  и  $(-2a; 0)$ .

Если  $\varphi \rightarrow 3\pi/2$ , то  $\rho \rightarrow \infty$  и  $\rho \cos \varphi \rightarrow -3a$ . Поэтому прямая  $y = -3a$

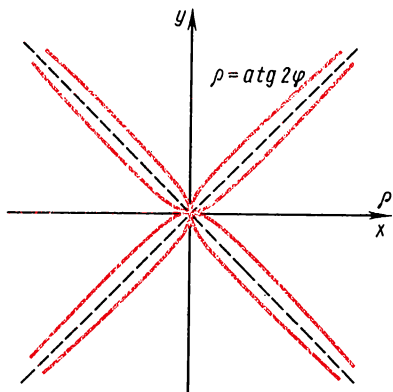


Рис. 251

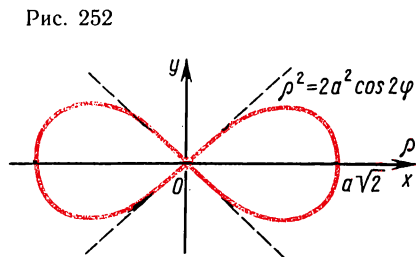


Рис. 252

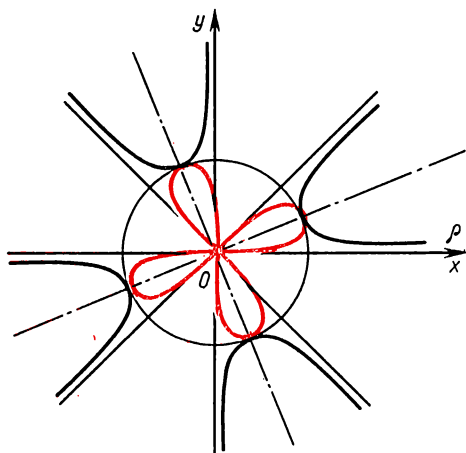


Рис. 253

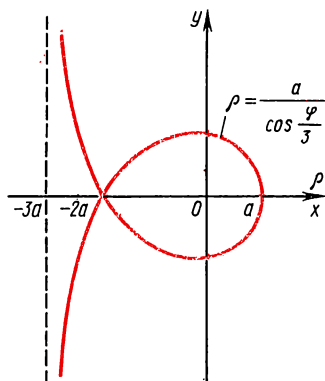


Рис. 254

является асимптотой данной кривой. Так как  $\cos(\varphi/3)$  — четная функция, то кривая симметрична относительно оси абсцисс (рис. 254).

### 7. Конхоида Никомеда $\rho = \frac{a}{\sin \varphi} + l$ ( $a > 0, l > 0$ ).

Кривая имеет асимптоту  $y = a$ , так как  $\lim_{\varphi \rightarrow 0} \rho \sin \varphi = a$ . Если  $0 \leq \varphi \leq \pi$ , то  $\rho \geq l$ , что дает первую ветвь кривой; если же  $\pi \leq \varphi \leq 2\pi$ , то  $\rho \leq l$ , что дает вторую ветвь кривой. Форма кривой зависит от величины параметров  $a$  и  $l$ . При  $l < a$  кривая принимает вид, изображенный на рис. 255, а. При  $l = a$  кривая имеет в начале координат точку возврата (рис. 255, б), а при  $l > a$  — точку самопересечения (рис. 255, в). При  $l = 0$  кривая вырождается в прямую  $y = a$ .

Точки перегиба найдем из условия  $\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho'' = 0$ ; откуда  $\rho = (\rho'' \pm \sqrt{\rho''^2 - 8\rho'^2})/2$ . Так как  $\rho' = -a \cos \varphi / \sin^2 \varphi$ ,  $\rho'' = a(1 + \cos^2 \varphi) / \sin^3 \varphi$ , то  $\rho = 2a \cos^2 \varphi / \sin^3 \varphi$  или  $\rho^3 \sin^3 \varphi = 2a \rho^2 \cos^2 \varphi$  и, следовательно,  $y^3 = 2ax^2$ , т. е. точки перегиба лежат на параболе  $y = \pm \sqrt[3]{2ax^2}$ .

Таким образом, при  $l < a$  кривая имеет четыре точки перегиба, при  $l \geq a$  — только две.

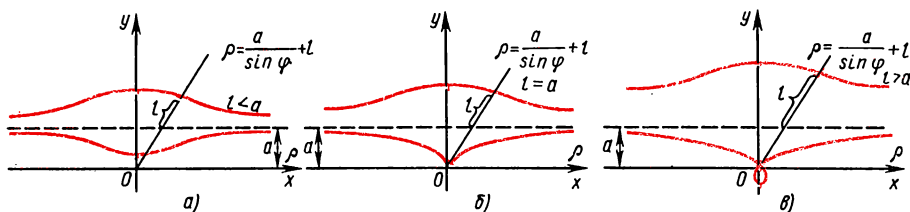


Рис. 255

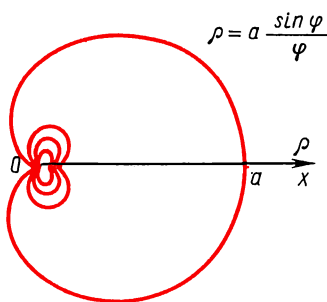


Рис. 256

$$8. \text{ Коклеоида } \rho = a \frac{\sin \varphi}{\varphi}.$$

Если  $\varphi = 0$ , то  $\rho = a$ ; если же  $\varphi = \pi k$  ( $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ), то  $\rho = 0$ . Так как  $\frac{\sin \varphi}{\varphi}$  — четная функция, то кривая симметрична относительно полярной оси.

При  $\varphi \rightarrow \infty$  значение  $\rho \rightarrow 0$ , причем радиус-вектор последовательно описывает затухающие лепестки, вершины которых достигаются при значениях  $\varphi$ , являющихся корнями уравнения  $\operatorname{tg} \varphi = \varphi$  (рис. 256).

## Раздел X

### ВАЖНЕЙШИЕ КРИВЫЕ

#### § 1. Алгебраические кривые 2-го порядка

##### 1. Эллипс.

Каноническое уравнение эллипса имеет вид  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ , где  $a$  и  $b$  — большая и малая полуоси (рис. 257);  $F_1(c; 0)$  и  $F_2(-c; 0)$  — фокусы, причем  $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ ; эксцентриситет  $e = c/a$  ( $e < 1$ ).

Эллипс можно определить как геометрическое место точек  $M(x; y)$ , для которых сумма расстояний до двух заданных фиксированных точек  $F_1$  и  $F_2$  (фокусов) постоянна и равна  $2a$ .

Расстояния  $r_1 = F_1M$  и  $r_2 = F_2M$  определяются по формулам  $r_1 = a - ex$ ,  $r_2 = a + ex$ .

Директрисы эллипса — прямые, параллельные малой оси и находящиеся от нее на расстоянии  $d = a/e$ . Для любой точки эллипса справедливо соотношение  $r_1/d_1 = r_2/d_2 = e$ .

Эллипс может быть задан параметрически:  $x = a \cos t$ ,  $y = b \sin t$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ .

При  $a = b$  эллипс превращается в окружность. Уравнение окружности с центром в начале координат и радиусом  $R$  (рис. 258, а) имеет вид  $x^2 + y^2 = R^2$ . Уравнение окружно-

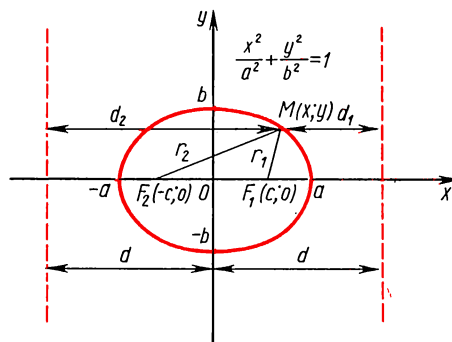


Рис. 257

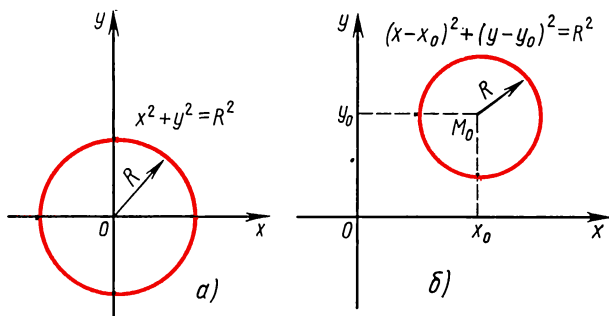


Рис. 258

сти с центром в точке  $M_0(x_0; y_0)$  и радиусом  $R$  (рис. 258, б) имеет вид  $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$

## 2. Гипербола.

Каноническое уравнение гиперболы имеет вид  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ , где  $a$  и  $b$  — действительная и мнимая полуоси (рис. 259);  $F_1(c; 0)$  и  $F_2(c; 0)$  — фокусы, причем  $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ ; эксцентриситет  $e = c/a > 1$ .

Гиперболу можно определить как геометрическое место точек  $M(x; y)$ , для которых абсолютная величина разности расстояний до двух заданных фиксированных точек  $F_1$  и  $F_2$  (фокусов) постоянна и равна  $2a$ .

Расстояния  $r_1 = F_1M$  и  $r_2 = F_2M$  выражаются формулами  $r_1 = \pm(ex - a)$ ,  $r_2 = \pm(ex + a)$ . Верхний знак соответствует правой ветви, а нижний — левой ветви.

Уравнения асимптот гиперболы имеют вид  $y = \pm \frac{b}{a}x$ .

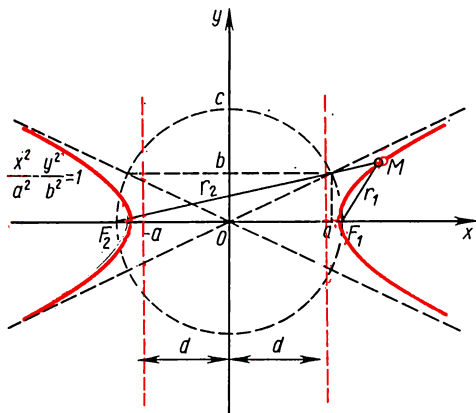


Рис. 259

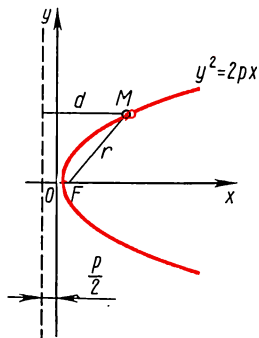


Рис. 260



*Директрисы* гиперболы — прямые, параллельные мнимой оси гиперболы и отстоящие от нее на расстояние  $d = a/c$ . Для любой точки гиперболы справедливо соотношение  $r_1/d_1 = r_2/d_2 = e$ .

Гипербола может быть задана параметрически:  $x = ach\,t$ ,  $y = ash\,t$ ,  $-\infty < t < +\infty$ .

При  $a = b$  гипербола называется *равнобочной*.

### 3. Парабола.

Каноническое уравнение параболы имеет вид  $y^2 = 2px$ , где  $p$  — *фокальный параметр*;  $F(p/2; 0)$  — *фокус* (рис. 260).

*Директриса* параболы — прямая, перпендикулярная оси  $x$ ; ее уравнение  $x = -p/2$ .

Эксцентриситет параболы  $e$  равен единице.

Параболу можно определить как геометрическое место точек, равноудаленных от заданной фиксированной точки  $F(p/2; 0)$  (фокуса) и от данной прямой (директрисы).

## § 2. Алгебраические кривые 3-го порядка

### 1. Полукубическая парабола (рис. 261).

Уравнение кривой:  $a^2x^3 - y^2 = 0$ .

Параметрическое представление:  $x = t^2$ ,  $y = at^3$ ,  $-\infty < t < +\infty$ .

Кривая допускает представление в явном виде:  $y = \pm ax^{3/2}$ .

### 2. Локон Аньези (рис. 262).

Уравнение кривой:  $(x^2 + a^2)y - a^3 = 0$ ; асимптота  $y = 0$ .

Кривая допускает представление в явном виде:  $y = \frac{a^3}{x^2 + a^2}$

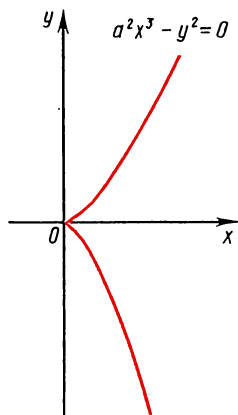
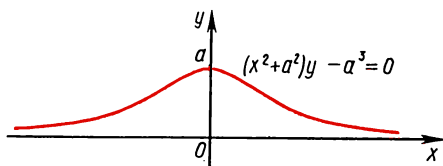


Рис. 261

Рис. 262



---

### 3. Декартов лист (см. рис. 219).

---

Уравнение кривой:  $x^3 + y^3 - 3axy = 0$ ,  $a > 0$ .

Параметрическое представление:  $x = \frac{3at^2}{1+t^3}$ ,  $y = \frac{3at^3}{1+t^3}$ ,  $1 < |t| < \infty$ .

О свойствах кривой и ее построении см. с. 129, 130.

---

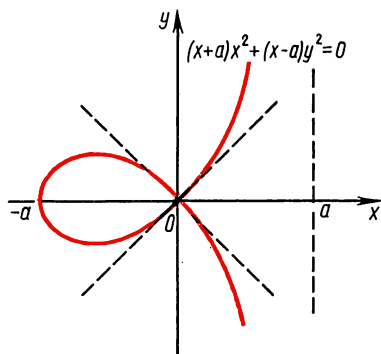


Рис. 263

---

### 4. Циссоида (см. рис. 212).

---

Уравнение кривой:  $x^3 + (x - a)y^2 = 0$ ,  $a > 0$ .

Параметрическое представление:  $x = \frac{at^2}{1+t^2}$ ,  $y = \frac{at^3}{1+t^2}$ ,  $-\infty < t < +\infty$ .

О построении кривой (при  $a = 1$ ) см. с. 124, 125.

---

---

### 5. Строфоида (рис. 263).

---

Уравнение кривой:  $(x+a)x^2 + (x-a)y^2 = 0$ ,  $a > 0$ .

Параметрическое представление:  $x = \frac{a(t^2-1)}{t^2+1}$ ,  $y = \frac{at(t^2-1)}{t^2+1}$ ,  $-\infty < t < +\infty$ .

Начало координат — точка самопересечения; прямые  $y = \pm x$  — касательные к кривой в точке  $O(0; 0)$ ; асимптота  $x = a$ .

---

## § 3. Алгебраические кривые 4-го и высших порядков

---

---

### 1. Конхоида Никомеда (см. рис. 255).

---

Конхойдой данной кривой называется кривая, получающаяся при увеличении или уменьшении радиуса-вектора каждой точки данной кривой на постоянный отрезок  $l$ . Если уравнение кривой в полярных координатах имеет вид  $\rho = f(\varphi)$ , то уравнение ее конхойды есть  $\rho = f(\varphi) \pm l$ . Таким образом, конхоида Никомеда является конхойдой прямой  $\rho = a/\sin \varphi$ .

Уравнение конхойды Никомеда имеет вид  $(y-a)^2(x^2+y^2) - l^2y^2 = 0$ ,  $a > 0$ ,  $l > 0$ .

О построении кривой см. с. 153.

---

---

### 2. Улитка Паскаля (см. рис. 248, а).

---

Уравнение кривой:  $(x^2 + y^2 - ax)^2 - l^2(x^2 + y^2) = 0$ ,  $a > 0$ ,  $l > 0$ .

Параметрическое представление:  $x = a \cos^2 t + l \cos t$ ,  $y = a \cos t \sin t + l \sin t$ ,  $0 \leq t < 2\pi$ .

---

Уравнение в полярных координатах:  $\rho = a \cos \varphi + l$ .

О построении кривой (при  $a = 2r$ ) см. с. 150, 151.

### 3. Кардиоида (см. рис. 249).

Уравнение кривой:  $(x^2 + y^2)(x^2 + y^2 - 2ax) - a^2 y^2 = 0$ ,  $a > 0$ .

Параметрическое представление:  $x = a \cos t(1 + \cos t)$ ,  $y = a \sin t(1 + \cos t)$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ .

Уравнение в полярных координатах:  $\rho = a(1 + \cos \varphi)$ .

О построении кривой см. с. 151.

### 4. Лемниската Бернулли (см. рис. 252).

Уравнение кривой:  $(x^2 + y^2)^2 - 2a^2(x^2 - y^2) = 0$ ,  $a > 0$ .

Уравнение в полярных координатах:  $\rho = a\sqrt{2} \cos 2\varphi$ .

О построении кривой см. с. 152.

### 5. Овал Кассини (рис. 264).

Уравнение кривой:  $(x^2 + y^2)^2 - 2c^2(x^2 - y^2) - (a^4 - c^4) = 0$ ,  $c > 0$ ,  $a > 0$ .

Уравнение в полярных координатах:

$$\rho^2 = c^2 \cos 2\varphi \pm \sqrt{c^4 \cos 2\varphi + (a^4 - c^4)}.$$

Овал Кассини можно определить как геометрическое место точек, для которых произведение расстояний до двух заданных фиксированных точек  $F_1(c; 0)$  и  $F_2(-c; 0)$  есть величина постоянная, равная  $a^2$ , т. е.  $MF_1 \cdot MF_2 = a^2$ .

При  $a = 0$  овал вырождается в две точки  $F_1$  и  $F_2$ . При возрастании  $a$  от 0 до  $c$  около точек  $F_1$  и  $F_2$  появляются замкнутые линии, которые, увеличиваясь в размерах, сомкнутся при  $a = c$ , образовав лемнискату. При дальнейшем увеличении  $a$  овал представляет собой замкнутую линию, имеющую «талию». При  $a = c\sqrt{2}$  «талиа» исчезает. При последующем увеличении параметра  $a$  кривые примут форму эллипсообразных овалов.

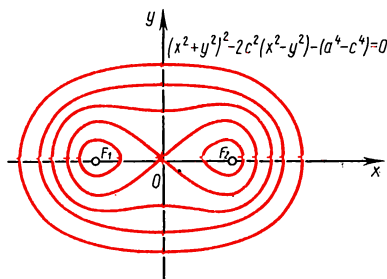


Рис. 264

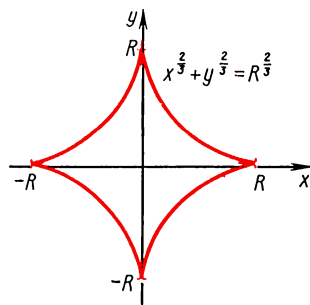


Рис. 265

## 6. Астроида (рис. 265)

Уравнение кривой:  $(x^2 + y^2 - R^2)^3 + 27R^2x^2y^2 = 0$ . Астроида является алгебраической кривой 6-го порядка.

Параметрическое представление:  $x = R\cos^3 \frac{t}{4}$ ,  $y = R\sin^3 \frac{t}{4}$ .

Исключая из этих уравнений параметр  $t$ , получим уравнение астроида в явном виде:  $x^{2/3} + y^{2/3} = R^{2/3}$

## § 4. Трансцендентные кривые

### 1. Циклоида (рис. 266).

Уравнение кривой:  $a\cos \frac{x + \sqrt{y(2a-y)}}{a} = a - y$ ,  $a > 0$ .

Параметрическое представление:  $x = a(t - \sin t)$ ,  $y = a(1 - \cos t)$ ,  $-\infty < t < +\infty$ .

Циклоиду можно определить как траекторию точки, лежащей на окружности, катящейся по прямой без скольжения; при этом  $a$  — радиус катящейся окружности;  $t$  — угол качения.

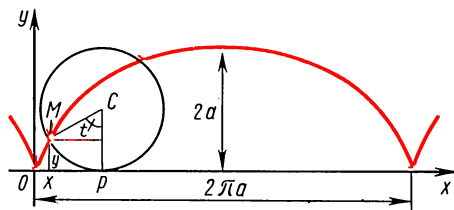


Рис. 266

### 2. Трохоида (рис. 267).

Параметрическое представление:  $x = a(t - \lambda \sin t)$ ,  $y = a(1 - \lambda \cos t)$ ,  $-\infty < t < +\infty$ .

При  $\lambda < 1$  кривую называют *укороченной циклоидой* (рис. 267, а), а при  $\lambda > 1$  — *удлиненной циклоидой* (рис. 267, б).

Трохоиду можно определить как траекторию точки, которая жестко связана с кругом, катящимся по прямой, и находится на произвольном, но фиксированном расстоянии от его центра.

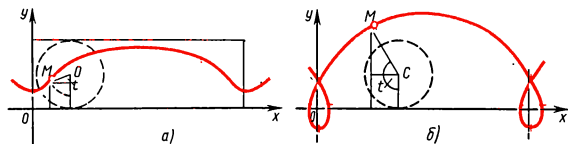


Рис. 267

## ЛИТЕРАТУРА

1. Бронштейн И. П., Семендяев К. А. Справочник по математике. — М.: Наука, 1986.
2. Демидович Б. П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. — М.: Физматгиз, 1962.
3. Дьяконов В. П. Справочник по алгоритмам и программам на языке бейсик для персональных ЭВМ. — М.: Наука, 1987.
4. Егеров В. К., Радунский Б. А., Тальский Д. А. Методика построения графиков функций. — М.: Высшая школа, 1970.
5. Ершов Л. В., Райхмист Р. Б. Построение графиков функций. — М.: Просвещение, 1984.
6. Зорич В. А. Математический анализ — М.: Наука, 1981.
7. Корн Г. Корн Т. Справочник по математике. — М.: Наука, 1974.
8. Крамер Г. Математические методы статистики. — М.: Мир, 1975.
9. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. — М.: Наука, 1965.
10. Погорелов А. В. Дифференциальная геометрия. — М.: Наука, 1974.
11. Савелов А. А. Плоские кривые. — М.: Физматгиз, 1960.
12. Сборник задач по дифференциальной геометрии/Под ред. А. С. Феденко. — М.: Наука, 1979.
13. Смогоржевский А. С., Столова Е. С. Справочник по теории плоских кривых третьего порядка. — М.: Физматгиз, 1961.
14. Справочник по специальным функциям/Под ред. М. Абрамовица и И. Стиган. — М.: Наука, 1979.
15. Справочник по теории вероятностей и математической статистике. — М.: Наука, 1985.
16. Янке Е., Эмде Ф., Лёш Ф. Специальные функции. — М.: Наука, 1977.

*Учебное издание*

**Райхмист Рудольф Борисович**

## ГРАФИКИ ФУНКЦИЙ

---

Зав. редакцией *Е. С. Гридасова*. Редактор *А. М. Суходский*. Художественный редактор *В. И. Пономаренко*. Технический редактор *Л. А. Муравьева*. Корректор *М. И. Козлова*.

ИБ № 8166

Изд. № ФМ-09. Сдано в набор 02.08.90. Подп. в печать 15.05.91. Формат 60×90/16. Бум. тип. № 2. Гарнитура литературная. Печать офсетная. Объем 10,0 усл. печ. л. 20,5 усл. кр.-отт. 8,92 уч. изд. л. Тираж 74 000 экз. Зак. № 1177. Цена 1 р. 20 к.

Издательство «Высшая школа», 101430, Москва, ГСП-4, Неглинная ул., д. 29/14.  
Ярославский полиграфкомбинат Госкомпечати СССР. 150049, Ярославль, ул. Свободы, 97.

1 р. 20 н.

Современный инженер должен владеть техникой построения графиков различных функций. Графическое изображение функций — это необходимый элемент при оценочных расчетах в самых разнообразных областях знаний. Особую важность "графическое мышление" приобретает в экстремальных ситуациях, когда в считанные минуты нужно принять порой единственно правильное решение.

Автор надеется, что данная книга поможет любознательному читателю овладеть умением свободно строить графики функций, а также окажется полезной в качестве справочного пособия для специалистов в их практической и исследовательской работе.

*Р.Б.Райхмист*

# ГРАФИКИ ФУНКЦИЙ